Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 14.1.2015

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Übungen Maßtheorie: Blatt 11

30. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und

$$\Sigma = \{A \subset \mathbb{R}^2 : \{y \in \mathbb{R} : (n, y) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Zeige, dass (Ω, Σ) ein Messraum ist. (2)

(b) Zeige, dass (2)

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \lambda(\{y \in \mathbb{R} : (n, y) \in A\})$$

ein Maß auf (Ω, Σ) definiert, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

(c) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2\}$. Zeige, dass $f_1(x, y) = \mathbb{1}_A(x, y)$ und $f_2(x, y) = y\mathbb{1}_A(x, y)$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ liegen und bestimme (6)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1 \, d\mu \qquad \text{sowie} \qquad \int_{\mathbb{R}^2} f_2 \, d\mu.$$

31. Wir betrachten $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit dem Zählmaß μ. Zeige, dass für $1 \leq p \leq q < \infty$ die Inklusion $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \subset L^q(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ gilt mit (5)

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \qquad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu).$$

Bemerkung: Man verwendet üblicherweise die Notation $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$.