Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 21.1.2015

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler

Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15+10

Übungen Maßtheorie: Blatt 12

32. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Banachraum ist. Zeige, dass dies im Allgemeinen falsch ist, falls man in der Definition von L^1 Lebesgue-integrierbar durch Riemann-integrierbar ersetzt. (7)

Hinweis: Verwende ein Beispiel aus der Vorlesung oder betrachte eine Funktion mit einer Singularität.

33. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wie in der Vorlesung kann man auch für $p \in (0,1)$ die Räume $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ definieren (mit der analogen Wahl von $\|\cdot\|_p$). Zeige, dass diese jedoch keine Banachräume definieren. (5)

Hinweis: Ist $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für diese Wahlen von p ein normierter Vektorraum?

34. Wir haben zwei natürliche Maßräume über den reellen Zahlen kennengelernt. Einerseits haben wir $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, die Borelmengen mit dem Lebesgue-Maß, und andererseits deren Vervollständigung $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \overline{\lambda})$. Wir haben also eine gewisse Wahlfreiheit, was wir mit einer messbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meinen. (3+10)

Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ die Cantor-Funktion aus Aufgabe 27 und $g\colon [0,1] \to [0,1]$ gegeben durch $g(x) = \frac{1}{2}(x + f(x))$. Untersuche für alle vier Kombinationsmöglichkeiten aus den Maßräumen $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ und $([0,1], \mathcal{L}([0,1]), \overline{\lambda})$, ob die Funktion g^{-1} messbar ist.

Hinweis: Verwende die Ergebnisse aus Aufgabe 27. Zeige und benutze, dass jede Menge $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ mit $\overline{\lambda}(A) > 0$ eine Teilmenge besitzt, die keine Lebesgue-Menge ist.

Bemerkung: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Borel-messbar*, falls $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und *Lebesgue-messbar*, falls $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wir haben in der Vorlesung und in Aufgabe 28 gesehen, dass jede Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-messbar, aber im Allgemeinen nicht Borel-messbar ist.