Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 28.1.2015

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Übungen Maßtheorie: Blatt 13

35. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeige, dass dann (2)

$$L^q(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu).$$

36. (a) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Betrachte (3)

$$I_f \coloneqq \{p \in [1, \infty] : f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\}.$$

Zeige, dass I_f ein Intervall ist.
Hinweis: Verwende die Hölder-Ungleichung.

(b) Zeige folgende partielle Umkehrung von Teil (a). Für jedes nicht-leere Teilintervall $I \subset [1, \infty]$ gibt es eine Borel-messbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $I_f = I$ (für den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$). (10)
Hinweis: Verwende die Logarithmusfunktion für einige Beispiele.