Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 11.2.2015

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15+5

Übungen Maßtheorie: Blatt 15

Bitte beachten: Am 14. Februar ist die Anmeldefrist für die Vorleistung!

41. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \neq q \in [1, \infty)$. Ferner sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ eine Folge mit $f_n \to f$ in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $f_n \to g$ in $L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Zeige oder widerlege: Es gilt $f = g$ fast überall. (4)

42. Seien $p, q \in [1, \infty)$ und (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeige, dass die Teilmenge (4)

$$C \coloneqq \{f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) : \|f\|_q \le 1\}$$

abgeschlossen in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist.

43. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für ein $p \in [1, \infty)$. Zeige, dass für jeden Repräsentanten g von f die Menge $\{x \in \Omega : g(x) \neq 0\}$ σ-endlich ist (d.h. diese lässt sich als abzählbare Vereinigung von Mengen mit endlichem Maß schreiben). (3)

44. Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für ein $p \in [1, \infty)$. Zeige, dass (4)

$$\|f\|_p^p = p \int_{[0,\infty)} \alpha^{p-1} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| \ge \alpha\}) \, d\lambda(\alpha).$$

Hinweis: Verwende den Satz von Fubini.

45. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar.

(a) Zeige, dass $f \circ g$ Lebesgue-messbar ist. (+1)

(b) Zeige, dass $g \circ f$ im Allgemeinen nicht Lebesgue-messbar ist. (+4)