Klausur Maßtheorie

1. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen. Achte dabei auf vollständige Argumentationen. Aussagen aus der Vorlesung und den Übungen dürfen verwendet werden. Beachte, dass es nur Punkte für die korrekte Argumentation und nicht für die Wahr-/ Falsch-Aussage gibt.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Dann ist f (Borel-)messbar. (5)

(b) Die Menge $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist abzählbar. (5)

(c) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(n) = 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = 1$. (5)

(d) Sei $\mu = \delta_0$ das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definierte Dirac-Maß in der Null. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit $\mu(A) = \int_A f \, d\lambda$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. (5)

(e) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist T (Borel)-messbar. (5)

(f) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n(x) = x^n$ konvergiert in $L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ (λ Lebesgue-Maß) für alle $p \in [1, \infty)$. (5)

(g) Sei μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann definiert $x \mapsto \mu([0, x))$ eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (5)

(h) Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Wir definieren durch (5)

$$\mu(A) := \int_A x^2 \, d\lambda(x) \qquad \text{für } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann liegt $f(x) = x^{-1}$ in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

(i) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann ist auch die Funktion $(x, y) \mapsto g(x - y)f(y)$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. (5)

(j) Betrachte den Messraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ mit dem Lebesgue-Maß λ. Dann gibt es eine positive messbare Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit (5)

$$f \in L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \quad \Leftrightarrow \quad p \in (2,4).$$

2. Sei (Ω, Σ) ein Messraum und $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: (10)

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für $A, B \in \Sigma$ mit $A \cap B = \emptyset$.

(iii) Seien $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ mit $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, so folgt $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

Zeige, dass dann μ ein Maß ist.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Gebe jeweils für beide Seiten der untenstehenden Aussagen die Definitionen aus der Vorlesung und beweise diese anschließend vollständig.

(a) Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (10)

(b) Es gilt $\lambda_{\mathbb{R}^2} = \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{R}}$. (10)

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_{\mathbb{R}})$. Zeige, dass $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, f(x)]\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und (10)

$$\lambda_{\mathbb{R}^2}(A) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_{\mathbb{R}}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet hierbei $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

5. Sei $p \in [1, \infty)$. Wir betrachten den Raum $L^p = L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mit dem Lebesgue-Maß λ.

(a) Zeige mit einer Skizze, dass es für $0 \leq a < b \leq 1$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ mit $f_n \to \mathbb{1}_{[a,b)}$ in L^p gibt. (5)

(b) Zeige, dass es für jedes $A \in \mathcal{B}([0,1])$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ mit $f_n \to \mathbb{1}_A$ in L^p gibt. (+20)

(c) Folgere, dass $C[0,1]$ dicht in L^p liegt. (5)