Universität Ulm

Mittwoch, 8.4.2015

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 100+20

Lösungen zur Klausur Maßtheorie

1. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen. Achte dabei auf vollständige Argumentationen. Aussagen aus der Vorlesung und den Übungen dürfen verwendet werden. Beachte, dass es nur Punkte für die korrekte Argumentation und nicht für die Wahr-/ Falsch-Aussage gibt.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Dann ist f (Borel-)messbar. (5)

Lösung: Die Aussage ist falsch. Nach der Vorlesung gibt es eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, die keine Borelmenge ist. Betrachte nun die Funktion $f = \mathbb{1}_A$. Diese nimmt nur zwei verschiedene Werte an. Nach der Vorlesung ist die Funktion f genau dann messbar, wenn A eine Borelmenge ist. Also ist f nicht messbar. Alternativ kann man auch direkt zeigen, dass f nicht messbar ist oder auf eine Übungsaufgabe verweisen (3 Punkte für ein richtiges Beispiel, 2 Punkte für die Begründung).

(b) Die Menge $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist abzählbar. (5)

Lösung: Die Aussage ist falsch. So ist etwa $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nach der Vorlesung (da die Menge abgeschlossen oder alternativ abzählbar ist) und die Menge $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist nach Analysis I überabzählbar, da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist (3 Punkte für ein richtiges Beispiel, 2 Punkte für die Begründung).

(c) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(n) = 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = 1$. (5)

Lösung: Die Aussage ist richtig. Nach den Übungen gilt für das Integral (4 Punkte für die erste Gleichheit, 1 Punkte für den Wert)

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Alternativ kann man das Integral wie in den Übungen auch erst für abgeschnittene Folgen berechnen (2 Punkte) und dann mit Beppo Levi zum Grenzwert übergehen (2 Punkte).

(d) Sei $\mu = \delta_0$ das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definierte Dirac-Maß in der Null. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit $\mu(A) = \int_A f \, d\lambda$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. (5)

Lösung: Die Aussage ist falsch. Angenommen es gibt eine solche Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$1 = \mu(\{0\}) = \int_{\{0\}} f \, d\lambda = 0,$$

da das Lebesgue-Integral über eine Nullmenge verschwindet, was offensichtlich ein Widerspruch ist (2 Punkte für die erste, 3 Punkte für die zweite Gleichheit).

(e) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist T (Borel)-messbar. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Nach Analysis II ist jede lineare Funktion stetig (3 Punkte). Also ist T insbesondere nach den Übungen messbar (2 Punkte).

(f) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n(x) = x^n$ konvergiert in $L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ (λ Lebesgue-Maß) für alle $p \in [1,\infty)$. (5)

Lösung: Die Aussage ist richtig. Die Folge konvergiert gegen die Nullfunktion in L^p. Dies kann man entweder über den Satz von Lebesgue oder durch eine direkte Rechnung zeigen. Um den Satz von Lebesgue anwenden zu können, stellt man fest, dass $f_n \to \mathbb{1}_{\{0\}}$ punktweise konvergiert (2 Punkte) und durch die Einsfunktion majorisiert ist (2 Punkte). Die Aussage folgt nun aus

$$\lim_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\lambda = \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\lambda = 0,$$

da das Lebesgue-Integral über Nullmengen verschwindet (1 Punkt für die letzte Gleichheit).

Bei der direkten Rechnung stellt man fest, dass $|f_n|$ stetig und damit Riemann-integrierbar ist. Nach der Vorlesung stimmen Lebesgue- und Riemannintegral überein (2 Punkte) und man kann letzteres über den Hauptsatz berechnen. Man erhält so (2 Punkte für die Rechnung, 1 Punkt für den Grenzwert)

$$\int_{[0,1]} |f_n|^p \, d\lambda = \frac{1}{1+np} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(g) Sei μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann definiert $x \mapsto \mu([0,x))$ eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (5)

Lösung: Die Aussage ist falsch. Betrachte etwa das Dirac-Maß $\mu = \delta_1$ ähnlich wie in Teilaufgabe (d). Dann gilt (3 Punkte für ein richtiges Beispiel, 2 Punkte für die Begründung)

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mu([0, 1+1/n)) \neq \mu([0,1)) = 0.$$

(h) Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Wir definieren durch (5)

$$\mu(A) := \int_A x^2 \, d\lambda(x) \qquad \text{für } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann liegt $f(x) = x^{-1}$ in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

Lösung: Die Aussage ist falsch. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > N\}) = \mu((-1/N, 1/N)) &= \int_{(-1/N,1/N)} x^2 d\lambda(x) = \int_{-1/N}^{1/N} x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{3}N^{-3} + \frac{1}{3}N^{-3} = \frac{2}{3}N^{-3} > 0\end{aligned}$$

keine Nullmenge bezüglich dem Maß μ. Also ist f nicht wesentlich beschränkt und damit liegt f (bzw. der Repräsentant von f) nicht in L^∞ (3 Punkte für die Abschätzung der Niveaumengen, 2 Punkte, falls die Definition von wesentlich beschränkt richtig verstanden und angewandt).

(i) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann ist auch die Funktion $(x,y) \mapsto g(x-y)f(y)$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. (5)

Lösung: Die Aussage ist richtig. Da das Produkt zweier messbarer Funktionen wieder messbar ist (1 Punkt), reicht es die Messbarkeit der einzelnen Faktoren zu zeigen. Nach Voraussetzung ist die Funktion $y \mapsto f(y)$ messbar. In den Übungen haben wir gezeigt, dass dann auch $h\colon (x,y) \mapsto f(y)$ messbar ist (2 Punkte). Alternativ folgt dies auch sofort aus

$$h^{-1}(A) = \mathbb{R} \times f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Zudem ist die Funktion $(x,y) \mapsto x - y$ stetig und damit messbar (1 Punkte). Somit ist die Funktion $(x,y) \mapsto g(x-y)$ als Komposition messbarer Funktionen ebenfalls messbar (1 Punkt).

(j) Betrachte den Messraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ mit dem Lebesgue-Maß λ. Dann gibt es eine positive messbare Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit (5)

$$f \in L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \quad \Leftrightarrow \quad p \in (2,4).$$

Lösung: Die Aussage ist falsch. Nach den Übungen haben wir für die L^p-Räume die Inklusion $L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \subset L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ für alle $p \geq 1$ (3 Punkte), da der Maßraum endlich ist (2 Punkte). Somit kann die obere Bedingung nicht erfüllt sein.

2. Sei (Ω, Σ) ein Messraum und $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: (10)

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für $A, B \in \Sigma$ mit $A \cap B = \emptyset$.

(iii) Seien $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ mit $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, so folgt $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

Zeige, dass dann μ ein Maß ist.

Lösung: Nach der Definition eines Maßes aus der Vorlesung bleibt noch zu zeigen, dass (2 Punkte)

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \text{für } A_n \in \Sigma \text{ mit } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ für } n \neq m.$$

Seien also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ solche Mengen. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $B_k = \cup_{n=1}^{k} A_n \in \Sigma$ (2 Punkte). Dann gilt offensichtlich $B_k \subset B_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (1 Punkt) und $\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (1 Punkte). Zudem folgt durch mehrfaches Anwenden von (ii), dass $\mu(B_k) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$ (2 Punkte). Mit (iii) erhalten wir nun also (2 Punkte für das richtige Anwenden von (iii))

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Gebe jeweils für beide Seiten der untenstehenden Aussagen die Definitionen aus der Vorlesung und beweise diese anschließend vollständig.

(a) Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (10)

Lösung: Die linke Seite $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ist die kleinste σ-Algebra über $\mathbb{R}^2$, die alle offenen Mengen von $\mathbb{R}^2$ (bezüglich der euklidischen Metrik) enthält (2 Punkte). Die rechte Seite ist die kleinste σ-Algebra über $\mathbb{R}^2$, die alle Produkte der Form $A \times B$ für $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält (2 Punkte).

Wir zeigen nun die beiden nötigen Inklusionen. Beachte, dass nach der Vorlesung $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ von allen halboffenen Rechtecken der Form $[a,b) \times [c,d)$ mit reellen Zahlen $a < b$ und $c < d$ erzeugt wird (2 Punkte). Eine analoge Aussage gilt auch für $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sei also nun $A = [a,b) \times [c,d) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ wie oben. Da halboffene Intervalle in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ liegen, folgt direkt aus der Definition der Produkt-σ-Algbra, dass $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (1 Punkt). Da Rechtecke dieser Form $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (also dies die kleinste σ-Algebra ist, die alle halboffenen Rechtecke enthält), folgt direkt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (1 Punkt).

Sei nun umgekehrt $O_1 \times O_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist auch $O_1 \times O_2 \subset \mathbb{R}^2$ offen und damit $O_1 \times O_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (1 Punkt). Da per Definition solche Produkte von offenen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen, folgt die umgekehrte Inklusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (1 Punkt).

(b) Es gilt $\lambda_{\mathbb{R}^2} = \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{R}}$. (10)

Lösung: Die linke Seite $\lambda_{\mathbb{R}^2}$ ist nach Definition das (eindeutige) Borelmaß auf $\mathbb{R}^2$, das

$$\lambda_{\mathbb{R}^2}([a,b) \times [c,d)) = (b-a) \cdot (d-c)$$

für alle halboffenen Rechtecke wie in Teil (a) erfüllt (2 Punkte). Die rechte Seite ist das eindeutige (da $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ σ-endlich) Maß mit

$$\lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{R}}(A \times B) = \lambda_{\mathbb{R}}(A) \cdot \lambda_{\mathbb{R}}(B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (2 Punkte).

Für die Gleichheit beachte, dass beide Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ nach dem ersten Teil definiert sind, es macht also prinzipiell Sinn nach der Gleichheit zu fragen (2 Punkte). Seien nun $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{R}}([a,b) \times [c,d)) = \lambda_{\mathbb{R}}([a,b)) \cdot \lambda_{\mathbb{R}}([c,d)) = (b-a) \cdot (d-c)$$

nach der Definition des Produktmaßes und des eindimensionalen Lebesgue-Maßes (1+1 Punkte). Nach der Vorlesung ist aber $\lambda_{\mathbb{R}^2}$ das eindeutige Maß mit den oberen Eigenschaften. Hieraus folgt die zu beweisende Gleichheit (2 Punkte).

Alternativ kann man für den Schluss auch den Eindeutigkeitssatz für Maße benutzen. Hierzu verwendet man die oben nachgerechnete Gleichheit (1+1 Punkte) zusammen mit der Tatsache, dass die oben betrachteten halboffenen Rechtecke ein durchschnittsstabiles erzeugendes System von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ bilden (1 Punkt) und dass offensichtlich $\cup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n) \times [-n,n) = \mathbb{R}^2$ (1 Punkt).

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_{\mathbb{R}})$. Zeige, dass $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, f(x)]\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und (10)

$$\lambda_{\mathbb{R}^2}(A) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_{\mathbb{R}}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet hierbei $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Lösung: Wir zeigen zuerst die Messbarkeit von A. Betrachte dazu die Funktion $g\colon (y,x) \mapsto y - f(x)$. Die Funktion f ist als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und damit auch als Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in den zwei Variablen messbar (1 Punkt). Analog argumentiert man für den Minueden. Dies zeigt die Messbarkeit von g aufgefasst als Funktion $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ als Differenz zweier messbarer Funktionen (1 Punkt). Wegen $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ folgt nun (1 Punkt)

$$A = g^{-1}((-\infty, 0]) \cap \mathbb{R} \times [0, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Aus der Definition des Lebesgue-Integrals und aus dem Satz von Fubini (man beachte, dass der Integrand positiv ist und man den Satz aufgrund der Messbarkeit von A und damit $\mathbb{1}_A$ in zwei Variablen (!) anwenden darf (1 Punkt)) folgt nun

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathbb{R}^2}(A) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A \, d\lambda_{\mathbb{R}^2} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}}(x,y) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(y) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda([0, f(x)]) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

(2 Punkte für die erste Gleichheit, 2 Punkte für das Umschreiben des Indikators, 2 Punkte für die Darstellung als f am Ende).

5. Sei $p \in [1, \infty)$. Wir betrachten den Raum $L^p = L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mit dem Lebesgue-Maß λ.

(a) Zeige mit einer Skizze, dass es für $0 \le a < b \le 1$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ mit $f_n \to \mathbb{1}_{[a,b)}$ in L^p gibt. (5)

Lösung: Wir verzichten in der Lösung auf eine Skizze, skizzieren aber wörtlich kurz die Form. Man kann etwa die Funktionen f_n als stückweise lineare Funktionen wählen, die konstant den Wert 1 auf dem Intervall $[a, b)$ annehmen und außerhalb einer immer kleiner werdenden Umgebung von $[a, b)$ verschwinden. Diese Teile verbindet man dann linear (mit den offensichtlichen Modifikationen in den Fällen $a = 0$ oder $b = 1$) (5 Punkte für eine sinnvolle Skizze).

Dass die so gewählten Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich gegen $\mathbb{1}_{[a,b)}$ in L^p konvergieren, kann man leicht mit dem Satz von Lebesgue prüfen (nicht verlangt in der Klausur).

(b) Zeige, dass es für jedes $A \in \mathcal{B}([0,1])$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ mit $f_n \to \mathbb{1}_A$ in L^p gibt. (+20)

Lösung: Sei $p \in [1, \infty)$. Wir betrachten das Mengensystem (3 Punkte)

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}([0,1]) : \text{ es gibt eine Folge } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1] \text{ mit } f_n \to \mathbb{1}_A \text{ in } L^p\}.$$

Nach Teil (a) der Aufgabe enthält $\mathcal{D}$ alle halboffenen Intervalle $[a, b)$ mit $0 \le a < b \le 1$ (1 Punkt). Insbesondere ist also die Gesamtmenge $[0,1] \in \mathcal{D}$, da $\mathbb{1}_{[0,1)} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ in L^p (1 Punkt). Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist. Dazu sei zuerst $A \in \mathcal{D}$. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ mit $f_n \to \mathbb{1}_A$ in L^p. Für A^c gilt damit

$$\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_A \xleftarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1} - f_n$$

in L^p. Mit f_n ist auch $\mathbb{1} - f_n$ eine stetige Funktion und damit ist $A^c \in \mathcal{D}$ (2 Punkte). Es bleibt noch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{D}$ bezüglich abzählbarer disjunkter Vereinigungen zu zeigen. Seien also $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ paarweise disjunkt. Dann gibt es Folgen $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_{k,n} \to \mathbb{1}_{A_k}$ für $n \to \infty$. Setze $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $g_m = \mathbb{1}_{\cup_{k=1}^m A_k}$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz erhält man

$$\lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]} |\mathbb{1}_A - g_m|^p \, d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{m\to\infty} \left| \mathbb{1}_{\cup_{k=m+1}^\infty A_k} \right|^p d\lambda = 0.$$

Hier haben wir benutzt, dass für $x \in [0,1]$ entweder $x \notin A_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ oder $x \in A_{m_0}$ für ein $m_0 \in \mathbb{N}$ und damit wegen der paarweisen Disjunktheit $x \notin A_m$ für alle $m > m_0$ gilt. Somit konvergiert der Integrand auf der rechten Seite punktweise gegen Null. Wir haben also $g_m \to \mathbb{1}_A$ in L^p für $m \to \infty$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Es gibt ein $n_{k,m}$ mit $\left\|\mathbb{1}_{A_k} - f_{k,n_{k,m}}\right\|_p \le m^{-2}$. Setze $h_m = \sum_{k=1}^m f_{k,n_{k,m}}$. Offensichtlich ist h_m eine stetige Funktion. Ferner ist für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\|g_m - h_m\|_p = \left\| \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{A_k} - f_{k,n_{k.m}} \right\|_p \le \sum_{k=1}^m \left\|\mathbb{1}_{A_k} - f_{k,n_{k,m}}\right\|_p \le \sum_{k=1}^m m^{-2} = m^{-1}.$$

Wir erhalten also mit der Dreiecksungleichung

$$\limsup_{m\to\infty} \|\mathbb{1}_A - h_m\|_p \le \limsup_{m\to\infty} \|\mathbb{1}_A - g_m\|_p + \limsup_{m\to\infty} \|g_m - h_m\|_p = 0.$$

Also konvergiert die Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ gegen $\mathbb{1}_A$ in L^p. Damit ist $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System (5 Punkte).

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}$ durchschnittstabil ist. Seien dazu $A, B \in \mathcal{D}$. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von stetigen Funktionen mit $f_n \to \mathbb{1}_A$ und $g_n \to \mathbb{1}_B$ in L^p. Wir können zusätzlich annehmen, dass $0 \le f_n, g_n \le 1$, denn ansonsten ersetzen wir f_n

durch die stetige Funktion $\min(1, \max(0, f_n))$, die einen kleineren Abstand zu $\mathbb{1}_A$ als f_n hat. Nun gilt

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_{A\cap B} - f_n g_n\|_p &= \|\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - f_n g_n\|_p = \|\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B - g_n) + (\mathbb{1}_A - f_n) g_n\|_p \\ &\leq \|\mathbb{1}_A\|_\infty \|\mathbb{1}_B - g_n\|_p + \|\mathbb{1}_A - f_n\|_p \|g_n\|_\infty \\ &\leq \|\mathbb{1}_B - g_n\|_p + \|\mathbb{1}_A - f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $A \cap B \in \mathcal{D}$ (4 Punkte). Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{D}$ ein durchschnittstabiles Dynkin-System ist. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist $\mathcal{D}$ also eine σ-Algebra (2 Punkte). Da die halboffenen Intervalle nach der Vorlesung $\mathcal{B}([0,1])$ erzeugen und in $\mathcal{D}$ liegen, folgt $\mathcal{D} = \mathcal{B}([0,1])$ (2 Punkte). Mit anderen Worten gibt es für jedes $A \in \mathcal{B}([0,1])$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ mit $f_n \to \mathbb{1}_A$ in L^p.

(c) Folgere, dass $C[0,1]$ dicht in L^p liegt. (5)

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{E}$ dicht in L^p liegt (2 Punkte). Sei dazu $f \in L^p$. Nach der Vorlesung gibt es positive monoton wachsende Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_+$, die punktweise fast überall gegen f^+ und f^- konvergieren. Wegen $|f^+ - g_n| \leq f^+ \leq |f|$ folgt aus dem Satz von Lebesgue sofort, dass $w_n = g_n - h_n \in \mathcal{E}$ gegen f in L^p konvergiert und dass w_n in Standarddarstellung ist, falls g_n und h_n in Standarddarstellung sind (letzteres ist nicht wichtig für das Argument).

Wir zeigen als nächstes, dass wir Treppenfunktionen beliebig genau in L^p durch stetige Funktionen approximieren können (2 Punkte). Sei nun $w = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{A_k} \in \mathcal{E}$ in Standarddarstellung. Nach Teil (b) gibt es für $k = 1, \ldots, N$ stetige Funktionen $w_{k,n}$ mit $w_{k,n} \to \mathbb{1}_{A_k}$ in L^p für $n \to \infty$. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann sofort, dass die stetige Funktionen $w_n = \sum_{k=1}^N a_k w_{k,n}$ für $n \to \infty$ gegen w konvergieren.

Wir können nun den Beweis abschließen (mit neuen Bezeichnungen). Sei $f \in L^p$ und $\varepsilon > 0$. Nach dem ersten Teil gibt es ein $h \in \mathcal{E}$ mit $\|f - h\|_p \leq \varepsilon/2$. Nach dem zweiten Teil gibt es ein $g \in C[0,1]$ mit $\|g - h\|_p \leq \varepsilon/2$. Aus der Dreiecksungleichung folgt nun (1 Punkt)

$$\|f - g\|_p \leq \|f - h\|_p + \|g - h\|_p \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, haben wir nun gezeigt, dass $C[0,1]$ dicht in L^p liegt.