Themenvorschläge Seminar Reelle und Komplexe Analysis

Stephan Fackler

22. August 2014

In diesem Dokument findet Ihr einige Themenvorschläge für das Seminar. Die aufgeführten Inhalte in den einzelnen Themen dienen als Orientierung und sind nicht verpflichtend. Die genaue Gliederung des Vortrags und die Gewichtung der Inhalte ist den Teilnehmern überlassen. Als Literatur bieten sich für die meisten Vorträge die üblichen Lehrbücher über Funktionentheorie an. Für einige Vorträge ist in der Themenbeschreibung spezielle Literatur angegeben.

Eigene Themenvorschläge der Teilnehmer sind natürlich auch willkommen.

1 Abzählen von Nullstellen

In diesem Vortrag soll behandelt werden, wie man mit Hilfe des Residuensatzes Nullstellen und Pole meromorpher Funktionen zählen kann. Anschließend soll der Satz von Rouché bewiesen werden, mit dessen Hilfe man etwa einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben kann.

2 Holomorphe Automorphismen

In diesem Vortrag soll die Gruppe der Automorphismen der komplexen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ bestimmt werden. Zu diesem Zweck sollen die Möbius-Transformationen eingeführt und studiert werden.

3 Der Satz von Denjoy–Wolff

Der Satz von Denjoy–Wolf macht Konvergenzaussagen über das Verhalten von Selbstabbildungen $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ (also über das Verhalten der Folge $(f^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$), die keine Automorphismen der Kreisscheibe $\mathbb{D}$ sind. In diesem Vortrag soll der Satz von Denjoy–Wolff präzise formuliert und bewiesen werden. In diesem Rahmen kann auf diskrete komplexe dynamische Systeme eingegangen werden und weitere einfache Sätze über solche

Systeme oder etwa Julia- und Mandelbrotmengen vorgestellt werden.

Zusätzliche Literatur: [CG93], [Sha93, Chapter 5]

4 Die Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes

In der Vorlesung wurde bereits die Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes formuliert, aber nicht bewiesen. In diesem Vortrag soll dies nachgeholt werden. Hierzu müssen die Begriffe einer Homotopie von Wegen und eines einfach zusammenhängenden Gebiets erläutert werden.

5 Äquivalente Charakterisierungen von Elementargebieten

In diesem Vortrag soll der Riemannsche Abbildungssatz (ohne Beweis!) formuliert werden und einige Beispiele vorgestellt werden. Anschließend soll die Äquivalenz zwischen Elementargebieten und einfach zusammenhängenden Gebieten gezeigt werden. Desweiteren sollen nach Interesse weitere äquivalente Charakterisierungen von Elementargebieten besprochen werden.

6 Der Monodromiesatz und die Idee der Riemannschen Fläche

In diesem Vortrag soll erklärt werden, wie man holomorphe Funktionen entlang von einem Weg fortsetzen kann. Dieses Konzept soll anhand von mehreren Beispielen erläutert werden. Anschließend soll der Monodromiesatz formuliert und bewiesen werden, der unter bestimmten Voraussetzungen garantiert, dass der Wert der Fortsetzung am Endpunkt unabhängig von dem konkret gewählten Weg ist. In enger Verbindung hierzu steht die Theorie der Riemannschen Flächen, auf die an dieser Stelle kurz eingegangen werden kann.

Zusätzliche Literatur: [GK06, Chapter 10]

7 Die Eulersche Gammafunktion

Als Erstes soll die Gammafunktion als uneigentliches Integral definiert werden. Anschließend soll die Funktionalgleichung der Gammafunktion hergeleitet werden und damit die Gammafunktion als meromorphe Funktionen in die komplexe Ebene fortgesetzt werden (Residuen für nicht-negative ganze Zahlen berechnen). Anschließend könnte etwa die Gaußsche Produktdarstellung behandelt werden (hierfür müsste eine Einführung in die Theorie der unendlichen Produkte gegeben werden). Als Konsequenz kann dann die Identität

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

bewiesen werden.

8 Die Riemannsche ζ-Funktion und der Primzahlsatz

In diesem Vortrag soll die Riemannsche ζ-Funktion definiert und als meromorphe Funktion in die komplexe Ebene fortgesetzt werden. Anschließend sollen die trivialen Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion außerhalb des kritischen Streifens bestimmt werden. Zudem soll der Primzahlsatz formuliert werden und in der restlichen Zeit erläutert werden, wie dieser mit funktionentheoretischen Mitteln gezeigt werden kann.

9 Elliptische Funktionen und die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

In diesem Vortrag sollen elliptische Funktionen eingeführt werden. Hierbei handelt es sich um doppeltperiodische meromorphe Funktionen, die eine wichtige Rolle im Studium elliptischer Integrale spielen. In diesem Vortrag sollen die Liouvillschen Sätze über solche Funktionen besprochen werden. Es kann auch auf den Torus als natürlichen Definitionsbereich solcher Funktionen eingegangen werden. Anschließend soll mit der Weierstraßschen $\wp$-Funktion die einfach möglichste elliptische Funktion konstruiert werden. Hierbei sollte ein elementarer Ansatz gewählt werden, der den Satz von Mittag–Leffler vermeidet (dieser kann natürlich ergänzend ohne Beweis vorgestellt werden).

10 Elliptische Integrale

In diesem Vortrag sollen elliptische Integrale vorgestellt und die Namensbezeichnung geklärt werden. Anschließend soll die Verbindung zur Theorie der elliptischen Funktionen hergestellt werden. Hierzu müssen die Inhalte des Vortrags mit denen des vorherigen Vortrags abgestimmt und ergänzt werden.

11 Runge-Theorie

Die Runge-Theorie beschäftigt sich mit der Approximation von holomorphen Funktionen durch auf einem größeren Gebiet definierte holomorphe Funktionen. So besagt etwa der kleine Satz von Runge, dass falls $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum ist, sodass das Komplement $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend ist, jede holomorphe Funktion auf K gleichmäßig durch Polynome approximierbar ist. In diesem Vortrag sollen Sätze von diesem Typ formuliert und (in Spezialällen) bewiesen werden.

Zusätzliche Literatur: [GK06, § 12.1]

12 Holomorpher Funktionalkalkül für Matrizen

In diesem Vortrag soll der holomorphe Funktionalkalkül für Matrizen vorgestellt werden. Hierbei wird für eine holomorphe Funktion f und eine Matrix A erklärt, wie man die

Matrix $f(A)$ definiert. In diesem Vortrag soll dieser Funktionalkalkül mathematisch definiert werden und gezeigt werden, dass es sich bei der Zuweisung $f \mapsto f(A)$ um einen Algebrenhomomorphismus handelt. Anschließend sollen der spektrale Abbildungssatz für den Kalkül, die Spektraldarstellung von $f(A)$ und die Potenzreihenentwicklung der Resolventenabbildung $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ behandelt werden. Der Vortrag soll zudem durch eine Anwendung des Funktionalkalküls abgerundet werden.

Zusätzliche Literatur: [Kat95, Chapter 1, § 5.6]

Literatur

[CG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin, *Complex dynamics*, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993. MR 1230383 (94h:30033)

[GK06] Robert E. Greene and Steven G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, third ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. MR 2215872 (2006m:30001)

[Kat95] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition. MR 1335452 (96a:47025)

[Sha93] Joel H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993. MR 1237406 (94k:47049)