Universität Ulm
Abgabe:
01.07.10, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

23. Es sei $C_{2\pi} := \{f \in C([0,2\pi];\mathbb{C}) : \ f(0) = f(2\pi)\}$ und $\mathcal{T} := \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(t) := \exp(int)$ für $t \in [0,2\pi]$ und $n \in \mathbb{Z}$. (4)

(a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi : C(\mathbb{T}) \to C_{2\pi}$, gegeben durch

$$\Phi(f)(t) := f(\exp(it)) \quad (f \in C(\mathbb{T}), t \in [0,2\pi]),$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{T}$ dicht in $C_{2\pi}$ liegt.

24. Es sei $l^{1,2}(\mathbb{Z}) := \{(c_k) \in l^2(\mathbb{Z}) : (kc_k) \in l^2(\mathbb{Z})\}$.

(a) Zeige, dass es für alle $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$ eine Funktion $v \in H^1_{\mathrm{per}}(0,2\pi)$ gibt, sodass $\widehat{v}(k) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$. (3)

Hinweis: Betrachte eine Funktion mit Fourierkoeffizienten (ikx_k) und deren Stammfunktion.

(b) Zeige, dass es für alle $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$ eine Funktion $v \in H^1_{\mathrm{per}}(0,2\pi)$ gibt, sodass $\widehat{v}(k) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. (3)

(c) Zeige, dass $\mathcal{F}H^1_{\mathrm{per}}(0,2\pi) = l^{1,2}(\mathbb{Z})$. (2)