Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

25. Berechne folgende Funktionen: (4)

(a) $f \star g$, wobei $f := \mathbb{1}_{[a,b]}$ und $g := \mathbb{1}_{[c,d]}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $c < d$.

(b) $\mathcal{F} f(a\,\cdot)$, wobei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $a > 0$.

Eine **Algebra** ist ein Vektorraum $\mathcal{A}$ mit einer bilinearen Abbildung (innerem Produkt)

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y =: xy,$$

sodass $(xy)z = x(yz)$ für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$. Falls $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$, so heißt $\mathcal{A}$ **kommutativ**. Eine Algebra $\mathcal{A}$ versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt **normierte Algebra**, falls $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$. Eine vollständige normierte Algebra heißt **Banachalgebra**. Eine Element $e \in \mathcal{A}$ einer normierten Algebra $\mathcal{A}$ heißt **Einheit**, falls $\|e\| = 1$ und $e = xe = ex$ für alle $x \in \mathcal{A}$.

26. Entscheide, ob es sich bei folgenden Strukturen um eine Algebra, normierte Algebra oder Banachalgebra handelt und ob diese kommutativ ist und eine Einheit besitzt. (6)

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ mit der Komposition als innerem Produkt und der Operatornorm, wobei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum ist.

(b) $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R})$ mit der Faltung als innerem Produkt.

27. Es sei $\mathcal{S}$ der Schwartz-Raum. Zeige, dass $\mathcal{S}$ versehen mit der punktweisen Multiplikation $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ eine Algebra ist. (2)