UNIVERSITÄT ULM

Abgabe:

12.05.10, in der Vorlesung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

6. Wir betrachten den Prähilbertraum

$$C_{2\pi} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und stetig}\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f \mid g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad (f, g \in C_{2\pi})$$

und der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(t) := \exp(int)$.

Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist $f \in C_{2\pi}$ stetig differenzierbar, so besitzt f' die Fourierreihe (2)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ik(f \mid e_k)e_k.$$

(b) Ist $f \in C_{2\pi}$ zweimal stetig differenzierbar, so existiert ein $M > 0$ mit (2)

$$|(f \mid e_k)| \leq \frac{M}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

(c) Ist $f \in C_{2\pi}$ zweimal stetig differenzierbar, so konvergiert ihre Fourierreihe gleichmäßig gegen f, d.h. (4)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} (f \mid e_k)e_k$$

existiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und stimmt mit f überein.

7. Bestimme alle zweimal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f'' = -f$. (4)

Hinweis: Vergleiche die Fourierkoeffizienten von f'' und $-f$.