Universität Ulm
Abgabe:
27.05.10, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5

10. Es sei E ein normierter Vektorraum. Zeige, dass folgende Aussagen gelten. (6)

(a) Es seien $A, B \subset E$ Untervektorräume mit $E = A \oplus B$. Dann gibt es eine lineare Projektion $P : E \to E$ mit $PE = A$ und $\ker P = B$.

(b) Sei $P : E \to E$ eine lineare Projektion. Dann ist $E = PE \oplus \ker P$.

(c) Es sei $P : E \to E$ eine stetige lineare Projektion. Dann sind PE und $\ker P$ abgeschlossene Teilräume von E.

(d) Die Zerlegung $E = A \oplus B$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig, d.h. für einen Teilraum $A \subset E$ kann es mehrere verschiedene Teilräume $B \subset E$ mit $E = A \oplus B$ geben. Insbesondere ist die Projektion auf Aufgabenteil (a) im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Erinnerung: Eine Abbildung $P : E \to E$ heißt **Projektion**, falls $P^2 := P \circ P = P$.
Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil (c) ist ebenfalls richtig.

11. Sei H ein Hilbertraum und $U \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeige, dass eine lineare Projektion $P : H \to H$ mit $PH = U$ genau dann orthogonal ist, d.h. $\ker P = U^\perp$, wenn $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ für alle $x, y \in E$. (2)

12. Wir betrachten den Hilbertraum l^2 der quadratisch summierbaren Folgen. Es sei (4)

$$C := \{x = (x_n) \in l^2 : 0 \leq x_n \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der Folgen aus l^2, deren Einträge zwischen 0 und 1 liegen.

(a) Zeige, dass C abgeschlossen und konvex ist.

(b) Bestimme die orthogonale Projektion auf C.