UNIVERSITÄT ULM

Abgabe:

02.06.10, in der Vorlesung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

13. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $\varphi : H \to \mathbb{K}$ linear mit $\varphi \neq 0$. Beweise folgende Aussagen.

(a) Es gibt ein $e \in H$, sodass $H = \ker \varphi \oplus \operatorname{span}\{e\}$. (2)

(b) Die Abbildung φ ist genau dann stetig ist, wenn ihr Kern abgeschlossen ist. (4)

Bemerkung: Teil (a) bleibt richtig, wenn H ein beliebiger Vektorraum ist.

14. Es sei E ein normierter Vektorraum und F ein Banachraum. Die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen $T : E \to F$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(E, F)$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{L}(E, F)$ eine Vektorraum ist. (2)

(b) Zeige, dass $\mathcal{L}(E, F)$ versehen mit der Operatornorm ein Banachraum ist. (4)

Hinweis: Orientiere dich am Beweis der Vollständigkeit von $C[a, b]$ bzw. $\mathcal{F}^b[a, b]$.
Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass der Dualraum E' eines normierten Vektorraums immer vollständig ist.