Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10

23. Es sei $C_{2\pi} := \{f \in C([0,2\pi];\mathbb{C}) : f(0) = f(2\pi)\}$ und $\mathcal{T} := \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(t) := \exp(int)$ für $t \in [0,2\pi]$ und $n \in \mathbb{Z}$. (4)

(a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi : C(\mathbb{T}) \to C_{2\pi}$, gegeben durch

$$\Phi(f)(t) := f(\exp(it)) \quad (f \in C(\mathbb{T}), t \in [0,2\pi]),$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{T}$ dicht in $C_{2\pi}$ liegt.

Lösung:

(a) Offenbar ist Φ wohldefiniert, injektiv und linear. Um zu sehen, dass Φ surjektiv ist, betrachten wir die Funktion $\arg : \mathbb{T} \to [0,2\pi)$, die jeder Zahl $z \in \mathbb{T}$ den Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$ mit $\exp(i\varphi) = z$ zuordnet. Dann ist die Abbildung $\Psi : C_{2\pi} \to C(\mathbb{T})$, gegeben durch

$$\Psi(g)(z) = g(\arg z) \quad (g \in C_{2\pi}, z \in \mathbb{T}),$$

wohldefiniert es gilt $\Phi(\Psi(g)) = g$ für alle $g \in C_{2\pi}$. Wegen

$$\|\Phi f\| = \max_{t\in[0,2\pi]} |f(\exp(it)| = \max_{z\in\mathbb{T}} |f(z)| = \|f\| \quad (f \in C(\mathbb{T}))$$

ist Φ isometrisch.

(b) Wir verwenden die Bezeichnungen des vorherigen Aufgabenteils. Es genügt zu zeigen, dass $\Phi^{-1}\mathcal{T}$ dicht in $C(\mathbb{T})$ ist, wobei

$$\Phi^{-1}\mathcal{T} = \operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

mit $f_n(z) = \exp(in\arg(z)) = z^n$. Offenbar ist $\Phi^{-1}\mathcal{T}$ eine Algebra, welche die konstanten Funktionen enthält und abgeschlossen unter Konjugation ist. Da f_1 bereits die Punkte von $\mathbb{T}$ trennt, folgt die Behauptung aus dem Satz von Stone-Weierstrass.

24. Es sei $l^{1,2}(\mathbb{Z}) := \{(c_k) \in l^2(\mathbb{Z}) : (kc_k) \in l^2(\mathbb{Z})\}$.

(a) Zeige, dass es für alle $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$ eine Funktion $v \in H^1_{\text{per}}(0,2\pi)$ gibt, sodass $\widehat{v}(k) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$. (3)

Hinweis: Betrachte eine Funktion mit Fourierkoeffizienten (ikx_k) und deren Stammfunktion.

(b) Zeige, dass es für alle $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$ eine Funktion $v \in H^1_{\text{per}}(0,2\pi)$ gibt, sodass $\widehat{v}(k) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. (3)

(c) Zeige, dass $\mathcal{F}H^1_{\text{per}}(0,2\pi) = l^{1,2}(\mathbb{Z})$. (2)

Lösung:

(a) Es sei $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$. Da die Folge $(ikx_k) \in l^2(\mathbb{Z})$, gibt es eine Funktion $w \in L^2(0, 2\pi)$ mit $\widehat{w}(k) = ikx_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann definiert

$$v(t) := \int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

eine Funktion aus $H^1(0, 2\pi)$ mit $v' = w$. Wegen

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} w(s)\,\mathrm{d}s$$

ist $v(0) = v(2\pi) = 0$, also $v \in H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$. Aus

$$ik\widehat{v}(k) = \widehat{v'}(k) = \widehat{w}(k) = ikx_k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

erhalten wir, dass $\widehat{v}(k) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

(b) Es sei $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$ und $v \in H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ mit $\widehat{v}(k) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$. Wir setzen

$$c := \widehat{v}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann ist $u := v - c + x_0 \in H^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{Z})$ und es gilt

$$\widehat{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v(t) - c + x_0)\,\mathrm{d}t = x_0$$

und

$$\widehat{u}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(-ikt)(v(t) - c + x_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(-ikt)v(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{v}(k) = x_k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

(c) Es sei $u \in H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ und $x_k := \widehat{u}(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da $u' \in L^2(0, 2\pi)$, ist auch $(ikx_k) = (\widehat{u'}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$ und also $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$. Dies zeigt $\mathcal{F}H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi) \subset l^{1,2}(\mathbb{Z})$. Sei umgekehrt $(x_k) \in l^{1,2}(\mathbb{Z})$. Nach dem vorherigen Aufgabenteil gibt es eine Funktion $u \in H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ mit $\mathcal{F}u = (x_k)$.