Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12

Alle Punkte dieses Blattes sind Zusatzpunkte!

28. Wir sagen, dass eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ im **Cesàro Mittel** gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, falls die Folge $A_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ gegen a konvergiert. (6)

(a) Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergente Folge. Zeige, dass (a_n) auch im Cesàro Mittel gegen a konvergiert.

(b) Finde eine divergente Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$, die im Cesàro Mittel konvergiert.

(c) Konstruiere eine beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$, die nicht im Cesàro Mittel konvergiert.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (a_k - a)\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^n |a_k - a| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|a_k - a| + \varepsilon \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

(b) Man wähle z.B. $a_n = (-1)^n$. Dann ist $|\sum_{k=1}^n a_k| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(c) Wir konstruieren rekursiv eine Folge $(a_n) \subset \{-1, 1\}$ mit der gewünschten Eigenschaft durch folgende Vorschrift: Gegeben sei eine endliche Folge $a_1, \dots, a_N$ mit $\sum_{k=1}^N a_k = 0$. Dann gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N+N_1}\sum_{k=1}^{N+N_1} b_k \geq \frac{1}{2}$, wobei

$$b_k = \begin{cases} a_k & k \leq N \\ 1 & N < k \leq N + N_1. \end{cases}$$

Die Existenz eines solchen N_1 folgt aus Aufgabenteil (a). Anschließend fügen wir dieser Folge N_1 mal die Zahl -1 an und erhalten

$$c_k = \begin{cases} b_k & k \leq N + N_1 \\ -1 & N + N_1 < k \leq N + 2N_1 \end{cases}$$

mit $\frac{1}{N+2N_1}\sum_{k=1}^{N+2N_1} c_k = 0$. Indem wir dieses Verfahren iterieren, definieren wir eine beschränkte Folge die nicht im Cesàro Mittel konvergiert.

29. Wir betrachten den Raum $L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$, d.h. es ist (6)

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad (f\star g)(\cdot) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(\cdot - y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $f,g \in L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$, wobei g entsprechend 2π-periodisch fortzusetzen ist. Für $f \in L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$ sind ihre Fourierkoeffizienten gegeben durch

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(-t)f(t)\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{Z})$$

mit $e_k(t) := \exp(itk)$ und wir setzen $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e_k$. Ferner sei $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ der **Dirichletkern**, $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k$ der **Frejérkern** und $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_n(f)$ die Cesàro Mittel der Fourierreihe von f. Beweise folgende Aussagen.

(a) Es ist $S_n(f) = f\star D_n$ und $\sigma_n(f) = K_n \star f$ für alle $f \in L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es ist $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Es sei $f \in L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$. Dann ist

$$\begin{aligned}(f\star D_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)D_n(x-y)\,\mathrm{d}y &= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e_k(-y)\,\mathrm{d}y e_k(x)\\ &= \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e_k(x) = S_n(f)(x)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}(K_n\star f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(D_k\star f)(x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f)(x) = \sigma_n(f)(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es sei $N \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Bigg(\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x\Bigg)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1 = 1.\end{aligned}$$