Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

3. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass $(E, \|\cdot\|)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn jede absolut konvergente Reihe in E konvergiert. Dabei heißt eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ in E *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$. (6)

Lösung: Sei E vollständig und $(x_k) \subset E$ eine Folge mit $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$. Wähle $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$. Somit ist auch

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon$$

für alle $n > m \geq n_0$. Also bildet die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge, die auf Grund der Vollständigkeit in E konvergiert.
Wir nehmen nun an, dass jede absolut konvergente Reihe in E konvergiert und es sei $(x_k) \subset E$ eine Cauchyfolge. Wir wählen zunächst eine Teilfolge (x_{k_ν}) von (x_k) derart, dass

$$\left\| x_{k_\nu} - x_{k_{\nu+1}} \right\| < \frac{1}{2^\nu} \quad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^\infty (x_{k_\nu} - x_{k_{\nu+1}})$ absolut und nach Voraussetzung auch in E. Sei

$$y := \sum_{k=1}^\infty (x_{k_\nu} - x_{k_{\nu+1}}) = \lim_{N\to\infty} x_{k_1} - x_{k_{N+1}}$$

ihr Grenzwert. Dann ist (x_{k_ν}) ebenfalls konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{k_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} x_{k_\nu} - x_{k_1} + x_{k_1} = x_{k_1} - y.$$

Durch ein 2ε-Argument sieht man, dass auch (x_k) gegen $x_{k_1} - y$ konvergiert.

4. Es sei $(E, (\cdot \mid \cdot))$ ein Prähilbertraum und $F \subset E$. Zeige, dass $F^\perp$ ein abgeschlossener Teilraum von E ist. (3)

Lösung: Es seien $x, y \in F^\perp$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$(\alpha x + \beta y \mid z) = \alpha(x \mid z) + \beta(y \mid z) = 0 \quad (z \in F).$$

Also ist $F^\perp$ ein Teilraum von E. Um zu sehen dass $F^\perp$ abgeschlossen ist, sei $(x_n) \subset F^\perp$ eine konvergente Folge in $F^\perp$ mit Grenzwert $x \in E$. Für $z \in F$ erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, dass

$$|(x \mid z)| \leq |(x - x_n \mid z)| + |(x_n \mid z)| \leq \|x - x_n\| \, \|z\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also ist $x \in F^\perp$, was zu zeigen war.

5. Betrachte den Prähilbertraum (3)

$$C[0,2\pi] := \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig}\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f \mid g) := \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad (f,g \in C[0,2\pi]).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $e_n \in C[0,2\pi]$ gegeben durch

$$e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(int) \quad (t \in [0,2\pi]).$$

Zeige, dass die Familie $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ orthonormal ist.

Lösung: Man sieht sofort, dass

$$(e_n \mid e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(it(n-n))\,\mathrm{d}t = 1 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq m$ erhält man

$$(e_n \mid e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(it(n-m))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\exp(it(n-m)}{2\pi i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = \frac{1-1}{2\pi i(n-m)} = 0.$$