Universität Ulm

Abgabe:
20.05.10, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4

8. Wir betrachten den reellen Prähilbertraum (6)

$$C([-1,1]) := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f \mid g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeige, dass die Menge aller Monome $U := \{u_k(t) := t^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $C([-1,1])$ ist.

(b) Orthonormalisiere die Vektoren $\{u_0, u_1, u_2\}$ mit dem Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren.

Lösung:

(a) Wir nehmen an, es ist

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_{k_j}$$

für gewisse $\lambda_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und paarweise verschiedene $k_j \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$u_{k_n}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j u_{k_j}(t) \quad (t \in [-1,1]) \tag{1}$$

für $\alpha_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_n}$. Da die k_j paarweise verschieden sind, ist der Grad des Polynoms auf der rechten Seite von (1) verschieden von k_n. Leiten wir die Gleichung k_n-mal ab, steht auf der linken Seite die Konstante $(k_n)!$ und auf der rechten Seite entweder die Nullfunktion oder eine nicht-konstante Funktion. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch.

(b) Zunächst ist

$$e_0(t) := \frac{u_0(t)}{\|u_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (t \in [-1,1]).$$

Nun setzen wir

$$w_1(t) := u_1(t) - (u_1 \mid e_0)e_0(t) = t - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} s\,\mathrm{d}s = t \quad (t \in [-1,1])$$

und erhalten

$$e_1(t) := \frac{w_1(t)}{\|w_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad (t \in [-1,1]).$$

Schließlich definieren wir

$$\begin{aligned} w_2(t) &:= u_2(t) - (u_2 \mid e_0)e_0(t) - (u_2 \mid e_1)e_1(t) \\ &= t^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} s^2\,\mathrm{d}s - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} s^3\,\mathrm{d}s \cdot t \\ &= t^2 - \frac{1}{3} \quad (t \in [-1,1]). \end{aligned}$$

und mit

$$\|w_2\|^2 = \int_{-1}^{1} s^4 - \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{9}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

erhalten wir

$$e_2(t) := \frac{w_2(t)}{\|w_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \quad (t \in [-1,1]).$$

9. Es seien E und F reelle Prähilberträume. (6)

(a) Zeige, dass

$$(x \mid y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \quad (x, y \in E).$$

Dies nennt man die **Polarisationsgleichung**.

(b) Eine Abbildung $U : E \to F$ heißt isometrisch, falls $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in E$. Zeige, dass eine surjektive lineare Abbildung $U : E \to F$ genau dann unitär ist, wenn sie isometrisch ist.

Bemerkung: In einem komplexen Prähilberträum E gilt die folgende Polarisationsgleichung:

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2) \quad (x, y \in E).$$

Die Aussage aus Aufgabenteil (b) bleibt auch im komplexen Fall richtig.

Lösung:

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) &= \frac{1}{4}((x+y \mid x+y) - (x-y \mid x-y)) \\ &= \frac{1}{4}(\|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(x \mid y) - \|y\|^2) = (x \mid y)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in E$.

(b) Sei $U : E \to F$ unitär, dann ist

$$\|Ux\|^2 = (Ux \mid Ux) = (x \mid x) = \|x\|^2 \quad (x \in E),$$

d.h. U ist isometrisch.

Sei $U : E \to F$ surjektiv, linear und isometrisch. Wegen

$$Ux = 0 \Leftrightarrow \|Ux\| = \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x \in E),$$

ist U auch injektiv. Nach der Polarisationsgleichung ist

$$(Ux \mid Uy) = \frac{1}{4}(\|U(x+y)\|^2 - \|U(x-y)\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = (x \mid y) \quad (x, y \in E),$$

d.h. U ist unitär.