Universität Ulm

Abgabe:

02.06.10, in der Vorlesung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis — Blatt 6

13. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $\varphi : H \to \mathbb{K}$ linear mit $\varphi \neq 0$. Beweise folgende Aussagen.

(a) Es gibt ein $e \in H$, sodass $H = \ker\varphi \oplus \operatorname{span}\{e\}$. (2)

(b) Die Abbildung φ ist genau dann stetig ist, wenn ihr Kern abgeschlossen ist. (4)

Bemerkung: Teil (a) bleibt richtig, wenn H ein beliebiger Vektorraum ist.

Lösung:

(a) Es sei $e \in H$ mit $\varphi(e) \neq 0$. Für jedes $x \in H$ ist

$$y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} e \in \ker\varphi,$$

d.h. $H = \ker\varphi + \operatorname{span}\{e\}$ und offenbar ist die Summe direkt.

(b) Offenbar ist der Kern einer stetigen Abbildung abgeschlossen. Sei nun $F := \ker\varphi$ abgeschlossen. Dann ist $H = F \oplus F^\perp$. Wie im Beweis des Satzes von Riesz-Fréchet sei nun $e \in F^\perp$ mit $\varphi(e) = 1$. Für ein beliebiges $x \in H$ erhalten wir nun, dass

$$0 = (x - \varphi(x)e \mid e) = (x \mid e) - \varphi(x)\,\|e\|^2 .$$

Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ist φ stetig.

14. Es sei E ein normierter Vektorraum und F ein Banachraum. Die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen $T : E \to F$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(E, F)$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{L}(E, F)$ eine Vektorraum ist. (2)

(b) Zeige, dass $\mathcal{L}(E, F)$ versehen mit der Operatornorm ein Banachraum ist. (4)

Hinweis: Orientiere dich am Beweis der Vollständigkeit von $C[a, b]$ bzw. $\mathcal{F}^b[a, b]$.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass der Dualraum E' eines normierten Vektorraums immer vollständig ist.

Lösung:

(a) Die Axiome eines Vektorraums rechnet man leicht nach.

(b) Es sei $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ eine Cauchyfolge. Für jedes $x \in E$ ist

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\,\|x\| \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

und somit $(T_n x)$ eine Cauchyfolge in F. Da F vollständig ist, existiert der Grenzwert von $(T_n x)$ und wir schreiben

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Offenbar definiert T einen linearen Operator.

Wir zeigen zunächst, dass T beschränkt ist. Da (T_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $M > 0$ mit $\|T_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ und wähle ein $n_0 \in E$ mit $\|Tx - T_{n_0}x\| \leq 1$. Dann ist

$$\|Tx\| \leq \|Tx - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x\| \leq \|T - T_{n_0}\| + \|T_{n_0}\| \leq 1 + M.$$

Also ist T beschränkt mit $\|T\| \leq 1 + M$.

Wir zeigen nun, dass $\lim T_n = T$ in Operatornorm. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Für jedes $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ ist dann

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \quad (n, m \geq n_0).$$

Mit $m \to \infty$ erhalten wir, dass

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0, \|x\| \leq 1).$$

Deshalb ist auch $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.