# Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

**20.** Es sei $-\infty < a < b < \infty$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Partition des Intervalls $[a,b]$. Ferner sei $u \in C[a,b]$ mit $u_{|(t_{j-1},t_j)} \in H^1(t_{j-1},t_j)$ für alle $j = 1,\dots,n$. Zeige, dass $u \in H^1(a,b)$ mit $u'_{|(t_{j-1},t_j)} = (u_{|(t_{j-1},t_j)})'$ für alle $j = 1,\dots,n$. (4)

**Lösung:** Für $j = 1,\dots,n$ sei $u'_j \in L^2(t_{j-1},t_j)$ die schwache Ableitung von $u_{|(t_{j-1},t_j)}$. Wir setzten $g(t) = u'_j(t)$ für $t \in (t_{j-1},t_j)$ und $g(t) = 0$ für $t \in \{t_0,\dots,t_n\}$. Dann ist $g \in L^2(a,b)$. Um zu sehen, dass $g$ die schwache Ableitung von $u$ ist, sei $v \in C_c^1(a,b)$ beliebig. Mittels partieller Integration folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
-\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= -\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^n \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_j'(x)v(x)\,\mathrm{d}x - (u(t_j)v(t_j) - u(t_{j-1})v(t_{j-1})) \right) \\
&= \int_a^b g(x)v(x)\,\mathrm{d}x + u(a)v(a) - u(b)v(b) = \int_a^b g(x)v(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Also ist $g$ die schwache Ableitung von $u$.

**21.** Es sei $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x) := |x|$. Zeige, dass $u \in H^1(-1,1)$ und bestimme die schwache Ableitung $u'$. (2)

**Lösung:** Mit Hilfe der vorherigen Aufgabe sieht man leicht, dass $u \in H^1(-1,1)$ und für fast alle $x \in [-1,1]$ ist $u'(x) = \operatorname{sign}(x)$.

**22.** Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Wir definieren $H^2(a,b) := \{f \in H^1(a,b) : f' \in H^1(a,b)\}$. Zeige, dass (6)

(a) $H^2(a,b)$ ein Hilbertraum ist bzgl. $(f \mid g)_{H^2} := (f \mid g)_{L^2} + (f' \mid g')_{L^2} + (f'' \mid g'')_{L^2}$.

(b) $H^2(a,b) \subset C^1[a,b]$.

**Lösung:**

(a) Wie beim Beweis der Vollständigkeit von $H^1(a,b)$ betrachten wir den Hilbertraum

$$\mathcal{H} := L^2(a,b) \times L^2(a,b) \times L^2(a,b)$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f \mid g)_{\mathcal{H}} := (f_1 \mid g_1)_{L^2} + (f_2 \mid g_2)_{L^2} + (f_3 \mid g_3)_{L^2} \quad (f = (f_1,f_2,f_3), g = (g_1,g_2,g_3) \in \mathcal{H}).$$

Die Abbildung $\Phi : H^2(a,b) \to \mathcal{H}$, gegeben durch $\Phi(f) := (f, f', f'')$ ist offenbar eine lineare Isometrie. Daher genügt es zu zeigen, dass $\Phi H^2(a,b)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$ ist. Sei dazu $(\Phi(u_n)) \subset \Phi H^2(a,b)$ eine konvergente Folge, d.h. es gibt $u, v, w \in L^2(a,b)$ mit

$$u_n \to u, \quad u_n' \to v, \quad u_n'' \to w \quad (n \to \infty)$$

jeweils im Sinne von $L^2$. Da insbesondere $(u_n) \subset H^1(a,b)$ und $u_n \to u$ in $H^1$, ist $u' = v$. Um zu sehen, dass $u'' = w$, sei $\varphi \in C_c^1(a,b)$ beliebig. Nach der Hölderungleichung ist

$$-\int_a^b u'\varphi' \,\mathrm{d}x = -\lim \int_a^b u_n'\varphi' \,\mathrm{d}x = \lim \int_a^b u_n''\varphi \,\mathrm{d}x = \int_a^b w\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Also ist $w$ die schwache Ableitung von $u'$, d.h. $w = u''$.

(b) Sei $u \in H^2(a,b)$. Dann ist $u' \in H^1(a,b) \subset C[a,b]$. Also ist

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(y) \,\mathrm{d}y \quad (x \in [a,b]),$$

d.h. $u$ stimmt mit einer $C^1[a,b]$-Funktion überein.