Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 11

Übungen zur Harmonischen Analyse

Blatt 2

2. Zeige, dass $(C_{2\pi}(X), \|\cdot\|_\infty)$ homogen bzgl. $L^1_{2\pi}(X)$ ist, $(L^\infty_{2\pi}(X), \|\cdot\|_\infty)$ jedoch nicht.

3. Beweise die folgenden expliziten Darstellungen des Dirichletkerns $D_n := \sum_{k=-n}^n e_k$ sowie des Fejérkerns $F_n := \frac{1}{n+1}(D_0 + \cdots + D_n)$.

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} & t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

und

$$F_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\right)^2 & t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

4. Es sei X ein Banachraum und $(a_k) \subset X$ eine Folge. Wir setzen

$$S_n := \sum_{k=-n}^n a_k, \quad \sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n S_k, \quad p_r := \sum_{k=-\infty}^\infty r^{|k|} a_k \quad (n \in \mathbb{N},\ r \in (0,1)).$$

(a) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$, falls $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ in X existiert.

(b) Gib ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von Aufgabenteil (a) an, d.h., finde eine Folge (a_k) für die $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ existiert und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(c) Zeige, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\|a_n + a_{-n}\|}{n} = 0,$$
falls $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ existiert. Folgere weiter, dass in diesem Fall $p_r \in X$ für alle $r \in (0,1)$ wohldefiniert ist.

(d) Finde eine Folge (a_k) für die $p_r \in X$ wohldefiniert ist für alle $r \in (0,1)$, $\lim_{r\uparrow 1} p_r$ existiert und $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Wir nehmen nun an, dass der Grenzwert $S := \lim_{n\to\infty}\sigma_n$ in X existiert.

(e) Zeige, dass
$$p_r = (1-r)^2 \sum_{k=0}^\infty (k+1)\sigma_k r^k$$
für alle $r \in (0,1)$.

(f) Zeige, dass $\lim_{r\uparrow 1} p_r = S$.

Hinweis: Berechne die Summe $\sum_{k=0}^\infty (k+1) r^k$.