Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 11

Übungen zur Harmonischen Analyse

Blatt 5

11. Es sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und X ein separabler Banachraum. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Für $1 \leq q \leq p \leq r \leq \infty$ ist $L^q(\Omega; X) \cap L^r(\Omega; X)$ dicht in $L^p(\Omega; X)$.

Hinweis: Für jede Funktion aus L^p gibt es sogar eine Folge integrierbarer einfacher Funktionen, die sie approximiert.

(b) Es sei F ein dichter Unterraum von $L^p(\Omega; \mathbb{K})$ und Y ein dichter Unterraum von X. Dann ist $F \otimes Y$ ein dichter Unterraum von $L^p(\Omega; X)$.

(c) Es sei $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega; X))$ und $1 < p < \infty$, sodass

$$\|T'f\|_p \leq c\|f\|_p \quad (f \in L^p(\Omega; X) \cap L^2(\Omega; X)).$$

Weiter sei $0 \leq \Theta \leq 1$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ und $\frac{1}{q} = \frac{\Theta}{2} + \frac{1-\Theta}{p'}$. Dann gibt es genau einen Operator $U \in \mathcal{L}(L^q(\Omega; X))$, sodass $Uf = Tf$ für alle $f \in L^{p'}(\Omega; X) \cap L^2(\Omega; X)$.

12. Es sei $1 < p < \infty$ und $a > 0$. Berechne die Norm der folgenden Operatoren auf $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ und zeige, dass sie mit der Hilberttransformation auf $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ kommutieren.

- $(\mathcal{T}_a f)(x) := f(x + a) \quad (x \in \mathbb{R})$
- $(\delta_a f)(x) := f(ax) \quad (x \in \mathbb{R})$
- $(\check{f})(x) := -f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

13. Zeige, dass die Hilberttransformation auf $L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ nicht beschränkt ist.