ÜBERDECKUNGSSATZ VON VITALI UND DIFFERENZIERBARKEIT MONOTONER FUNKTIONEN

JOHANNES WIESEL

1. Einleitung

Das Ziel dieses Doppelvortrags ist der Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral. In der Analysis haben wir bereits einen entsprechenden Satz über den Zusammenhang zwischen Ableitung und Riemannintegral für stetige Funktionen formuliert. Nun möchten wir hier eine ähnliche Aussage für das Lebesgue-Integral treffen.
Im ersten Teil möchten wir dafür die Basis durch den Überdeckungssatz von Vitali legen. Dieser besagt, dass man eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen durch eine endliche Teilmenge einer Vitali-Überdeckung beliebig genau überdecken kann. Weiterhin werden wir den Satz von Lebesgue über die Differenzierbarkeit monotoner Funktionen diskutieren, der später zum Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verwendet wird. Hier benutzen wir den Überdeckungssatz von Vitali um zu zeigen, dass das Integral über der Ableitung einer auf einem Intervall definierten monotonen Funktion durch die Funktionswerte an den Grenzen nach oben beschränkt ist.
Folgende Notationen werden verwendet:

$$\text{Lebesgue-Maß } \lambda : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty] \quad \lambda([a,b]) = b-a$$

$$\text{äußeres Lebesgue-Maß } \eta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$$

$$\eta(A) = \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) : I_n = (a,b) \quad A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right\}$$

2. Der Überdeckungssatz von Vitali

Zuerst wollen wir nun also den Begriff einer Vitali-Überdeckung einführen und anschließend den Überdeckungssatz von Vitali formulieren.

Definition 2.1 (Vitali-Überdeckung)**.** Es seien $A \subset \mathbb{R}$ und F eine Familie von abgeschlossenen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(I) > 0$. Dann heißt F eine Vitali-Überdeckung von A, wenn zu jedem $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ ein $I \in F$ existiert, sodass $x \in I$ und $\lambda(I) < \varepsilon$.

Das heißt also, dass jeder Punkt $x \in A$ in bzgl. des Maßes beliebig kleinen Mengen $I \in F$ enthalten ist.

Beispiel 2.2. Eine Vitali-Überdeckung von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ könnte zum Beispiel so aussehen:

$$F = \{I(x,\varepsilon) : \ x \in \mathbb{Q}, \ \varepsilon > 0\} \quad I(x,\varepsilon) = \left[x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

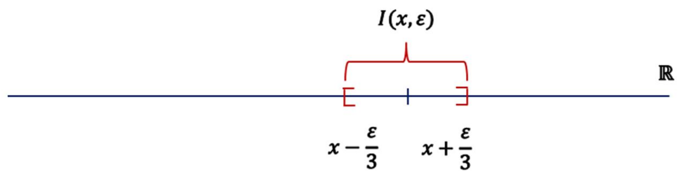

Abbildung 1. Vitali-Überdeckung $\mathbb{Q}$

Satz 2.3 (Überdeckungssatz von Vitali)**.** *Sind $A \subset \mathbb{R}$ eine (nicht notwendig messbare) Menge endlichen äußeren Lebesgue-Maßes und F eine Vitali-Überdeckung von A, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_n \in F$ $(n \geq 0)$, sodass*

$$\eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Das heißt also, dass endlich viele Teilmengen von Vitali-Überdeckungen fast ganz A überdecken.

Beweis. Für $A = \emptyset$ wähle $n = 0$ und das leere System von Intervallen. Dann ist die Aussage natürlich erfüllt.
Sei also nun $A \neq \emptyset$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\eta(A) < \infty$ finden wir nach Definition des äußeren Maßes eine offene Menge U als abzählbare Vereinigung offener Mengen mit $A \subset U$ und $\lambda(U) < \infty$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, dass F nur Intervalle enthält, die in U liegen.

Wir konstruieren nun induktiv eine Folge I_n von disjunkten Intervallen in F, sodass (2.1) gilt:
Beginnen wir also mit irgendeinem $I_1 \in F$. Seien $I_1, \dots I_k$ schon konstruiert. Ist $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, dann gilt die Behauptung für n=k und jedes $\varepsilon > 0$.
Sonst gilt $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j \neq \emptyset$. Dann wählen wir

$$r_k = \sup\left\{ \lambda(I) : I \in F,\ I \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j = \emptyset \right\}$$

und

$$I_{k+1} \in F \text{ mit } \lambda(I_{k+1}) > \frac{r_k}{2} \text{ und } I_{k+1} \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_k = \emptyset. \tag{2.2}$$

Nach Definition einer Vitali-Überdeckung ist dann $0 < r_k < \lambda(U) < \infty$ und wir erhalten eine Folge disjunkter I_k mit den obigen Eigenschaften.

Sei nun $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) \leq \lambda(U) < \infty.$$

Insbesondere gilt $r_k \to 0$, denn $0 \leftarrow \lambda(I_{k+1}) > \frac{r_k}{2}$ und es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(I_k) < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{2.3}$$

Wir weisen nun nach, dass (2.1) gilt:
Sei dazu $x \in A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Da $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ abgeschlossen ist, gibt es $I \in F$ disjunkt zu $I_1, \dots, I_k$ mit $x \in I$. Dann hat das Intervall I mit einem der I_k für $k \geq n+1$ einen nichtleeren Schnitt. Wäre nämlich $I \cap I_k = \emptyset\ \forall k \geq 1$, dann wäre $r_k > \lambda(I) > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, was im Widerspruch zu $r_k \to 0$ steht.
Sei nun $l > n$ die kleinste natürliche Zahl, für die gilt: $I \cap I_l \neq \emptyset$. Dann ist $\lambda(I) < r_{l-1} < 2\lambda(I_l)$ nach Definition von r_k und (2). Der Abstand von x zum Mittelpunkt von I_l beträgt höchstens $\lambda(I) + \lambda(I_l)/2 < (5\lambda(I_l))/2$.
J_k bezeichne das abgeschlossene Intervall mit dem gleichen Mittelpunkt wie I_k, sodass gilt: $\lambda(J_k) = 5\lambda(I_k)$. Also ist $x \in J_l$ und es liegt jedes $x \in A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ in einem der J_k $(k = n+1, \dots)$. Damit gilt:

$$(A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(J_k) = 5\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(I_k) < \varepsilon$$

mit (2.3) und damit ist die Aussage gezeigt. □

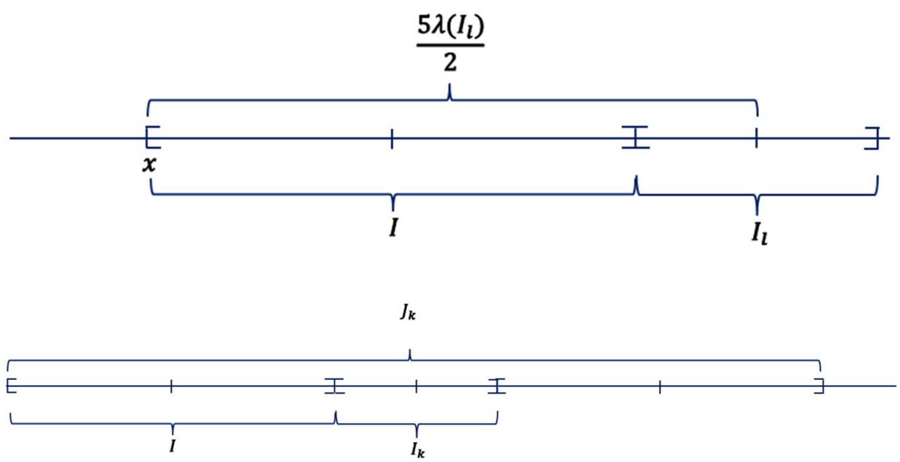

Abbildung 2. Konstruktion von J_k

3. Differenzierbarkeit monotoner Funktionen

Um den Satz von Lebesgue über die Differenzierbarkeit monotoner Funktionen beweisen zu können, führen wir zuerst einige Notationen ein.

Definition 3.1 (Differenzierbarkeit monotoner Funktionen λ-f.ü.)**.** Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$, so definieren wir

$$D^+ f(x) := \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

als rechte obere Ableitungszahl,

$$D_+ f(x) := \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

als rechte untere Ableitungszahl ,

$$D^- f(x) := \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

als linke obere Ableitungszahl,

$$D_- f(x) := \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

als linke untere Ableitungszahl von f in $x \in I$.

Dabei sind hier lim sup und lim inf in $\overline{\mathbb{R}}$ zu bilden. Gehört der linke (bzw. rechte) Eckpunkt von I zu I, so sind dort nur die rechten (bzw. linken) oberen und unteren Ableitungszahlen erklärt. Offenbar ist stets $D^+ f \geq D_+ f$ und $D^- f \geq D_- f$, und $x \in I$ ist genau dann differenzierbar, wenn in x alle Ableitungszahlen endlich und gleich sind (vgl. Analysis 1).

Satz 3.2 (Lebesgue)**.** *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist f λ-f.ü. auf $[a,b]$ differenzierbar. Setzt man $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$, in denen f nicht differenzierbar ist, so ist $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ und*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a). \tag{3.1}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass die Menge aller $x \in (a,b)$ mit $D^+ f(x) > D_- f(x)$ eine Nullmenge ist. Dafür genügt es zu zeigen: Für alle $r, s \in \mathbb{Q},\ r < s$, ist $A_{r,s} := \{x \in (a,b) : D^+ f(x) > s > r > D_- f(x)\}$ eine λ-Nullmenge, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ und die abzählbare Vereinigung einer Nullmenge wiederum eine Nullmenge ist. Wir setzen nun $\alpha := \lambda(A_{r,s}) \geq 0$. Außerdem wählen wir ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Menge U mit

$$A_{r,s} \subset U \subset (a,b) \text{ mit } \lambda(U) < \alpha + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Da $\lambda(U) > 0$ und U offen ist, existiert nach Definition 3.1 und Definition von $A_{r,s}$ zu jedem $x \in A_{r,s}$ ein $h > 0$, sodass

$$[x-h, x] \subset U \text{ und } f(x) - f(x-h) < rh. \tag{3.3}$$

Das System dieser abgeschlossenen Intervalle $[x-h, x]$ ist eine Vitali-Überdeckung von $A_{r,s}$.

Nach dem Satz 2.3 (Überdeckungssatz von Vitali) existieren daher endlich viele disjunkte Intervalle $I_m := [x_m - h_m, x_m] \subset U,\ m = 1, \dots, p$, sodass

$$\eta\left(A_{r,s} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{p} I_m\right)\right) < \varepsilon$$

und

$$\sum_{m=1}^{p} f(x_m) - f(x_m - h_m) \underbrace{<}_{(3.3)} r \sum_{m=1}^{p} h_m = r\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{p} I_m\right) \underbrace{<}_{(3.2)} r(\alpha + \varepsilon). \tag{3.4}$$

Analog dazu ist jedes $y \in \mathring{I}_m \cap A_{r,s}$ $(m = 1, \dots p)$ linker Endpunkt eines Intervalls $[y, y + k] \subset \mathring{I}_m$, sodass $f(y + k) - f(y) > sk$.

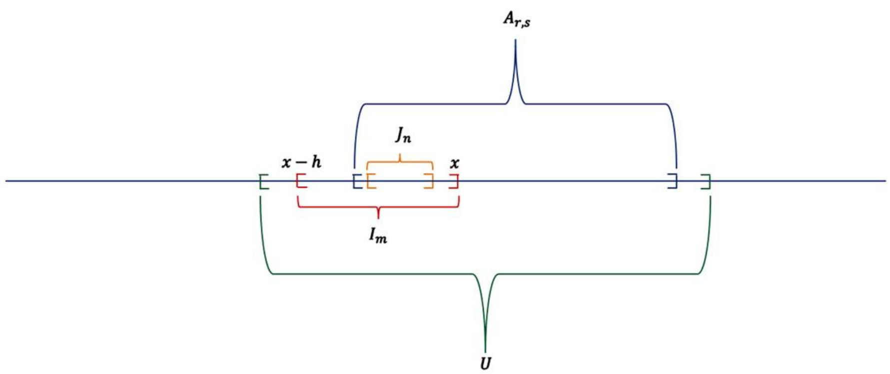

ABBILDUNG 3. Konstruktion von I_m und J_n

Das System dieser Intervalle ist eine Vitali-Überdeckung von $A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} \mathring{I}_m$. Nach dem Satz 2.3 (Überdeckungssatz von Vitali) existieren daher endlich viele disjunkte Intervalle $J_n = [y_n, y_n + k_n]$ $(n = 1, \dots, q)$, sodass

$$\eta\left(\left(A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} \mathring{I}_m\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) < \varepsilon$$

und

$$\eta\left(A_{r,s} \setminus \bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) \leq \eta\left(A_{r,s} \setminus \bigcup_{m=1}^{p} I_m\right) + \eta\left(\left(A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} \mathring{I}_m\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) < 2\varepsilon.$$

Damit folgt:

$$\sum_{n=1}^{q} f(y_n + k_n) - f(y_n) > s \sum_{n=1}^{q} k_n = s\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) \geq s(\alpha - 2\varepsilon) \tag{3.5}$$

Da jedes J_n in einem der I_m enthalten ist, summieren wir nun bei festem $m \in \mathbb{N}$ über alle n mit $J_n \subset I_m$. Es ergibt sich

$$\sum_{n \in \mathbb{N}: J_n \subset I_m} f(y_n + k_n) - f(y_n) \leq f(x_m) - f(x_m - h_m) \tag{3.6}$$

denn f ist monoton wachsend und die J_n sind disjunkt.
Wenn wir nun über alle $m = 1, \dots, p$ summieren, ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{q} f(y_n + k_n) - f(y_n) \leq \sum_{m=1}^{p} f(x_m) - f(x_m - h_m). \tag{3.7}$$

Nun folgt mit (3.4) und (3.5)

$$s(\alpha - 2\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{q} f(y_n + k_n) - f(y_n) \leq \sum_{m=1}^{p} f(x_m) - f(x_m - h_m) < r(\alpha + \varepsilon) \tag{3.8}$$

und damit $s(\alpha - 2\varepsilon) < r(\alpha + \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0, (s > r, \alpha \geq 0)$. Insbesondere folgt aus der Konstruktion von $A_{r,s}$ mit $r, s > 0$, dass gilt $\alpha = 0$, denn für $\varepsilon \to 0$ würde sonst gelten $s\alpha < r\alpha$ $\lightning$.

Damit ist $A_{r,s}$ eine Nullmenge und wir haben gezeigt: Es gilt $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ λ-f.ü..
Die Funktion $-f(a+b-x)$ $(x \in [a,b])$ ist ebenfalls monoton steigend von $-f(b)$ nach $-f(a)$ und stellt eine Punktspiegelung von f dar. Wenden wir das eben Gezeigte auf $-f(a+b-x)$ anstelle von f an, so ergibt sich $(y = a+b-x)$:

$$\begin{aligned} D^+(-f(a+b-x)) &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{-f(a+b-(x+h)) + f(a+b-x)}{h} \\ &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(y) - f(y-h)}{h} = D^- f(y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow D^- f(x) \leq D_+ f(x)$ λ-f.ü. und somit:

$$D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \tag{3.9}$$

und damit die Gleichheit der 4 Ableitungszahlen λ-f.ü.

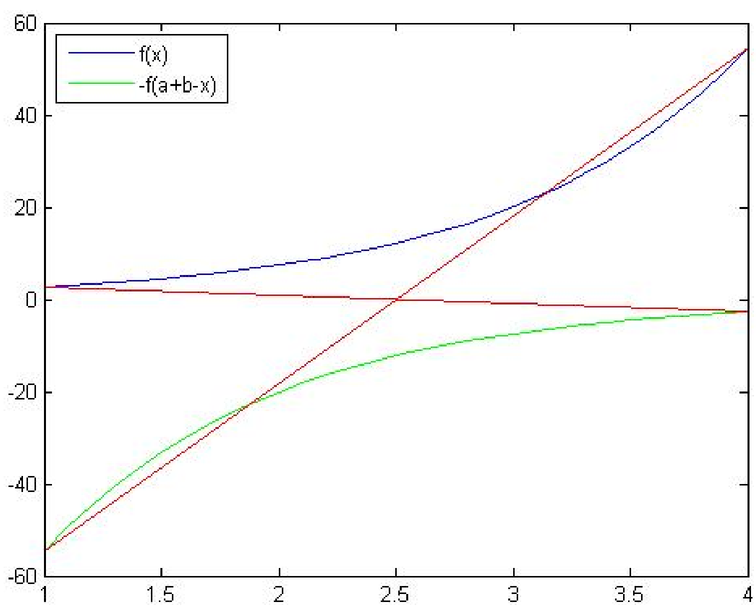

Abbildung 4. Beispiel mit a=1, b=4

Also existiert

$$g(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

λ-f.ü. als Limes in $\overline{\mathbb{R}}$.
Zeigen wir nun noch, dass g λ-f.ü. endlich und damit f λ-f.ü differenzierbar ist. Dazu definieren wir $g(x) := 0$ für alle x, für die der obige Limes in $\overline{\mathbb{R}}$ nicht existiert. Außerdem setzen wir $f(x) := f(b)$ für $x \geq b$ und definieren

$$g_n(x) := n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right). \tag{3.10}$$

Dann gilt $g_n \to g$ λ-f.ü., $n \to \infty$ und damit ist g Borel-messbar als Limes Borel-messbarer Funktionen, da f monoton und damit Borel-messbar ist. Da f monoton wachsend ist, ist $g_n \geq 0$. Somit erhalten wir mit dem Lemma von Fatou:

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)dx &= \int_a^b \liminf_{n\to\infty} g_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right) \leq f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

Also ist g λ-integrierbar und λ-f.ü endlich. Damit folgt, dass f λ-f.ü differenzierbar ist und es gilt die Aussage 3.1 des Satzes. □

Korollar 3.3 (Lebesgue)**.** *Jede Funktion von beschränkter Variation ist λ-f.ü. differenzierbar.*

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus der Tatsache, dass sich jede Funktion mit beschränkter Variation als Differenz monotoner Funktionen darstellen lässt. □

Literatur

[Els10] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Grundwissen Mathematik. Springer, 2010.