Überdeckungssatz von Vitali und Differenzierbarkeit monotoner Funktionen

Johannes Wiesel

30. Juni 2012

Definition (Vitali-Überdeckung)

$A \subset \mathbb{R}$ und F eine Familie von abgeschlossenen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(I) > 0$.

F heißt eine Vitali-Überdeckung von A, wenn zu jedem $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ ein $I \in F$ existiert, sodass $x \in I$ und $\lambda(I) < \varepsilon$.

Vitali-Überdeckung von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

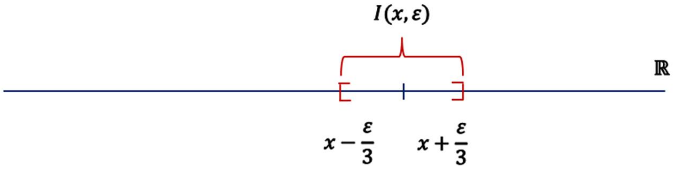


Abbildung: Vitali-Überdeckung von $\mathbb{Q}$

$$F = \{I(x, \varepsilon) : \ x \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\} \quad I(x, \varepsilon) = \left[x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

Satz (Überdeckungssatz von Vitali)

$A \subset \mathbb{R}$ mit $\eta(A) < \infty$ und F eine Vitali-Überdeckung von A

$\Rightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele disjunkte Intervalle

$I_1, \ldots, I_n \in F$ $(n \geq 0)$, sodass

$$\eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) < \varepsilon.$$

Beweis

$A = \emptyset$: Wähle $n = 0$ und das leere System von Intervallen.

Jetzt: $A \neq \emptyset$ und $\varepsilon > 0$.
Wegen $\eta(A) < \infty$ finde U offen, $A \subset U$ und $\lambda(U) < \infty$. OBdA $I \subset U$.

Beweis

$A = \emptyset$: Wähle $n = 0$ und das leere System von Intervallen.

Jetzt: $A \neq \emptyset$ und $\varepsilon > 0$.
Wegen $\eta(A) < \infty$ finde U offen, $A \subset U$ und $\lambda(U) < \infty$. OBdA $I \subset U$.

Idee: Konstruiere induktiv Folge I_n von disjunkten Intervallen in F mit $\eta(A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} I_k) < \varepsilon$:

1. Start: $I_1 \in F$.
2. $I_1, \dots I_k$ schon konstruiert. Ist $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, dann gilt die Behauptung für n=k $\Rightarrow$ fertig.

Beweis (2)

Sonst: $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j \neq \emptyset$.

Wähle dann

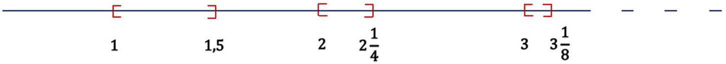
$$r_k = \sup\left\{\lambda(I) : I \in F,\ I \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j = \emptyset\right\}$$

und

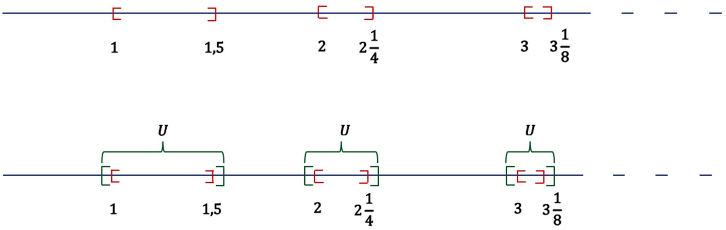
$$I_{k+1} \in F \text{ mit } \lambda(I_{k+1}) > \frac{r_k}{2} \text{ und } I_{k+1} \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j = \emptyset$$

$\Rightarrow 0 < r_k < \lambda(U) < \infty$.

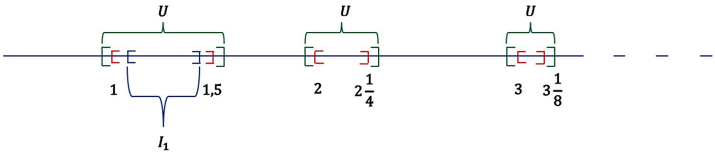
Beispiel zur Konstruktion



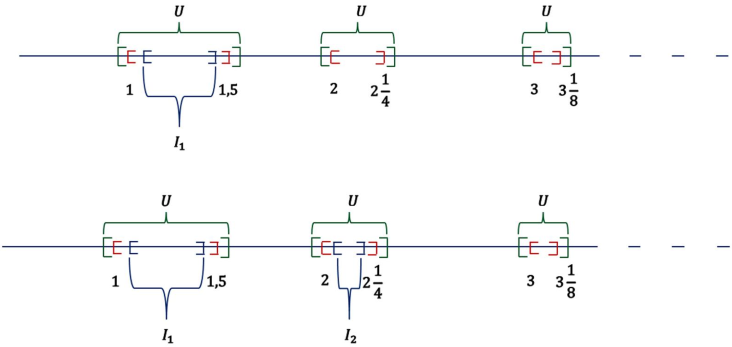
Beispiel zur Konstruktion



Beispiel zur Konstruktion (2)



Beispiel zur Konstruktion (2)



Beweis (3)

Jetzt: $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann $r_k \to 0$ und es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(I_k) < \frac{\varepsilon}{5}$.

Beweis (3)

Jetzt: $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann $r_k \to 0$ und es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(I_k) < \frac{\varepsilon}{5}$.

Zeige, dass $\eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_n) < \varepsilon$ gilt:

Dazu $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

$\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ abgeschlossen $\Rightarrow$ es gibt $I \in F$ disjunkt zu $I_1, \ldots, I_k$ mit $x \in I$.

Beweis (4)

Behauptung: Für ein $k \geq n+1$ gilt: $I_k \cap I \neq \emptyset$.

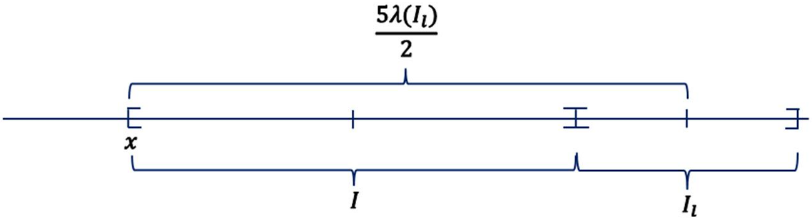
Dazu: Wäre $I \cap I_k = \emptyset \ \forall k \geq 1$, dann wäre $r_k > \lambda(I) \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Widerspruch zu $r_k \to 0$ ↯.

$$\left(\text{Zur Erinnerung: } r_k = sup \left\{ \lambda(I) : I \in F, \ I \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j = \emptyset \right\} \right)$$

Beweis (5)

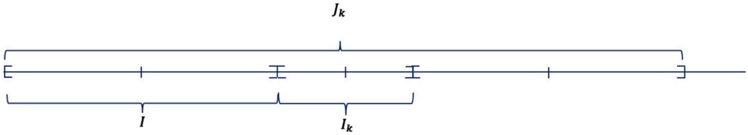
$l > n$ kleinste natürliche Zahl mit $I \cap I_l \neq \emptyset$.

$$\Rightarrow \lambda(I) < r_{l-1} < 2\lambda(I_l)$$
$$\left(r_k = sup\left\{ \lambda(I) : I \in F,\ I \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j = \emptyset \right\}, \quad \lambda(I_{k+1}) > \frac{r_k}{2} \right)$$



Beweis (6)

Definiere J_k:



$\Rightarrow x \in J_l$ und es gilt: Jedes $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ in einem J_l (l=n+1,...).

Damit

$$\eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(J_k) = 5 \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(I_k) < \varepsilon$$

$\square$

Satz (Lebesgue)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend $\Rightarrow f$ λ-f.ü. auf $[a, b]$ differenzierbar. Setzt man $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$, in denen f nicht differenzierbar ist, so ist $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ und

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

Definition (Differenzierbarkeit monotoner Funktionen λ-f.ü.)

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

$$D^+ f(x) := \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_+ f(x) := \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D^- f(x) := \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$D_- f(x) := \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Beweis

zentrale Behauptung: Menge aller $x \in (a, b)$ mit $D^+f(x) > D_-f(x)$ ist Nullmenge.

Dazu: Genügt zu zeigen: Für alle $r, s \in \mathbb{Q},\ r < s$, ist $A_{r,s} := \{x \in (a, b) : D^+f(x) > s > r > D_-f(x)\}$ Nullmenge.

Beweis (2)

Setze $\alpha := \eta(A_{r,s}) \geq 0$. Wähle $\varepsilon > 0$, U offen mit $A_{r,s} \subset U \subset (a, b)$ und $\lambda(U) < \alpha + \varepsilon$.
Zu jedem $x \in A_{r,s}$ existiert $h > 0$, sodass $[x - h, x] \subset U$ und $f(x) - f(x - h) < rh$.

$\Rightarrow$ System der $[x - h, x]$ ist Vitali-Überdeckung von $A_{r,s}$.

Beweis (3)

$\Rightarrow$ Überdeckungssatz von Vitali: Es gibt endlich viele disjunkte $I_m := [x_m - h_m, x_m] \subset U, \ (m = 1, \dots p)$, sodass

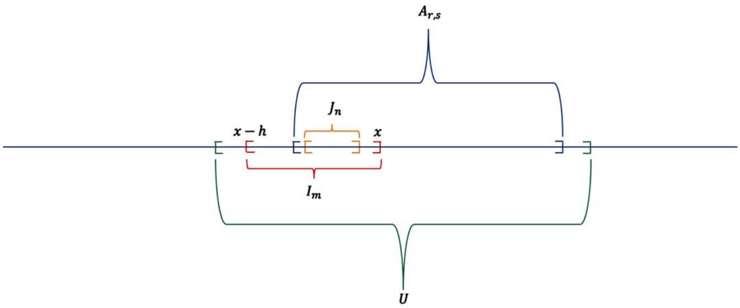
$$\eta\left(A_{r,s} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{p} I_m\right)\right) < \varepsilon$$

und

$$\sum_{m=1}^{p} f(x_m) - f(x_m - h_m) < r \sum_{m=1}^{p} h_m = r\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{p} I_m\right) < r(\alpha + \varepsilon).$$

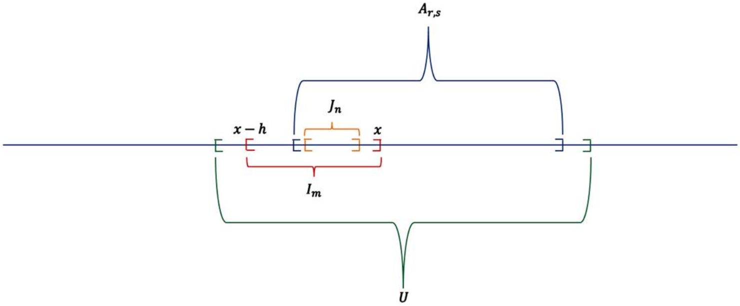
(Zur Erinnerung: $f(x) - f(x - h) < rh, \quad \lambda(U) < \alpha + \varepsilon$)

Beweis (4)



Konstruiere J_n: Jedes $y \in \mathring{I}_m \cap A_{r,s}$ $(m = 1, \ldots, p)$ ist linker Endpunkt von $[y, y+k] \subset \mathring{I}_m$, sodass $f(y+k) - f(y) > sk$.

Beweis (5)



$\Rightarrow$ Das System dieser Intervalle $[y, y+k]$ ist eine Vitali-Überdeckung von $A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} \mathring{I}_m$.

Beweis (6)

$\Rightarrow$ Überdeckungssatz von Vitali: Es gibt endlich viele disjunkte $J_n = [y_n, y_n + k_n]$ $(n = 1, \ldots, q)$, sodass

$$\eta\left(\left(A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} \mathring{I}_m\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) < \varepsilon$$

und

$$\eta\left(A_{r,s} \setminus \bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) \leq \eta\left(A_{r,s} \setminus \bigcup_{m=1}^{p} I_m\right) + \eta\left(\left(A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} \mathring{I}_m\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{q} J_n\right)$$
$$< 2\varepsilon.$$

Beweis (7)

Damit folgt:

$$\sum_{n=1}^{q} f(y_n + k_n) - f(y_n) > s \sum_{n=1}^{q} k_n = s\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) \geq s(\alpha - 2\varepsilon)$$

(Zur Erinnerung: $\eta\left(A_{r,s} \setminus \bigcup_{n=1}^{q} J_n\right) \leq 2\varepsilon, \quad \alpha := \eta(A_{r,s})$)

Beweis (8)

J_n in einem der I_m enthalten, summiere bei $m \in \mathbb{N}$ fest über n mit $J_n \subset I_m$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}: J_n \subset I_m} f(y_n + k_n) - f(y_n) \leq f(x_m) - f(x_m - h_m)$$

Beweis (8)

J_n in einem der I_m enthalten, summiere bei $m \in \mathbb{N}$ fest über n mit $J_n \subset I_m$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}: J_n \subset I_m} f(y_n + k_n) - f(y_n) \leq f(x_m) - f(x_m - h_m)$$

Summiere über alle $m = 1, \ldots, p$:

$$\sum_{n=1}^{q} f(y_n + k_n) - f(y_n) \leq \sum_{m=1}^{p} f(x_m) - f(x_m - h_m)$$

Beweis (9)

$$
\begin{aligned}
s(\alpha - 2\varepsilon) &\leq \sum_{n=1}^{q} f(y_n + k_n) - f(y_n) \\
&\leq \sum_{m=1}^{p} f(x_m) - f(x_m - h_m) < r(\alpha + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Damit: $\alpha = 0 \Rightarrow \ A_{r,s}$ ist Nullmenge.

Beweis (9)

$$
\begin{aligned}
s(\alpha - 2\varepsilon) &\leq \sum_{n=1}^{q} f(y_n + k_n) - f(y_n) \\
&\leq \sum_{m=1}^{p} f(x_m) - f(x_m - h_m) < r(\alpha + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Damit: $\alpha = 0 \Rightarrow \; A_{r,s}$ ist Nullmenge.

$\Rightarrow$ Es gilt $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ λ-f.ü..

Genauso für $-f(a + b - x)$ $(x \in [a, b]) \Rightarrow D^- f(x) \leq D_+ f(x)$ λ-f.ü. und somit:

$$D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x)$$

Beweis (10)

Also Gleichheit der 4 Ableitungszahlen λ-f.ü.

$\Rightarrow g(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existiert λ-f.ü. als Limes in $\overline{\mathbb{R}}$.

Beweis (10)

Also Gleichheit der 4 Ableitungszahlen λ-f.ü.
$\Rightarrow g(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existiert λ-f.ü. als Limes in $\overline{\mathbb{R}}$.

Bleibt noch zu zeigen: g λ-f.ü. endlich $\Rightarrow f$ λ-f.ü differenzierbar
Dazu: Definiere $g(x) := 0$ für alle x, für die der Limes in $\overline{\mathbb{R}}$ nicht existiert. Setze $f(x) := f(b)$ für $x \geq b$ und definiere:

$$g_n(x) := n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

$\Rightarrow g_n \to g$ λ-f.ü. $\Rightarrow g$ Borel-messbar

Beweis (11)

Mit Lemma von Fatou:

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx &= \int_a^b \liminf_{n\to\infty} g_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right) \leq f(b) - f(a)\end{aligned}$$

Also: g λ-integrierbar und λ-f.ü endlich. $\square$

Korollar

Jede Funktion von beschränkter Variation ist λ-f.ü. integrierbar.

$$\pi : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

$$V(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Beschränkte Variation: $\sup_\pi V(\pi, f) < \infty$

Beweis.

Jede Funktion von beschränkter Variation lässt sich als Differenz monotoner Funktionen darstellen. □

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.