Das Banach Tarski Paradoxon

Marcel Kreuter | Juni 2012 | Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Maßproblem (Lebesgue 1902)

- gesucht: ein Maß λ auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ mit
- $A \cong B \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(B)$
- $\lambda\left([0,1]^d\right) = 1$

Vitali Menge (Vitali 1905)

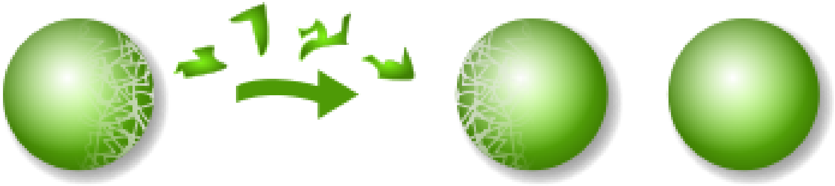
- Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$
- $(O_i)_{i \in I}$ Äquivalenzklassen
- $O_i \cap [0, 1] \neq \emptyset$
- wähle $x_i \in O_i \cap [0, 1]$ aus (Auswahlaxiom)
- $X := \{x_i : i \in I\}$ hat kein sinnvolles Maß
- benötigt: σ-Additivität

Inhaltsproblem

- ~~σ-Additivität~~ endliche Additivität
- $\Rightarrow$ Inhalt m
- Inhaltsproblem analog zum Maßproblem
- $A \cong B \Rightarrow m(A) = m(B)$
- $m\left([0,1]^d\right) = 1$

Inhaltsproblem

- Hausdorff 1914: Problem für $d \geq 3$ unlösbar
- Banach Tarski 1924: Banach Tarski Paradoxon



Das Banach Tarski Paradoxon

Satz (Banach Tarski Paradoxon)

Seien $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ *und* $B := A + b$ *bzw.* $C := A + c$ *mit* $b := (0,0,3)^T$ *bzw.* $c := (0,0,-3)^T$.
Es existieren paarweise disjunkte Mengen $A'_1, \ldots, A'_6, B'_1, B'_2, B'_3, C'_1, C'_2, C'_3$ *so, dass*

$$A = \bigcup_{i=1}^{6} A'_i, \;\; B = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3, \;\; C = C'_1 \cup C'_2 \cup C'_3$$

$$A'_i \cong B'_i, \;\; A'_{i+3} \cong C'_i \;\; (i = 1, 2, 3)$$

Freie Gruppen

- $SO(3)$ Gruppe der Drehungen im $\mathbb{R}^3$
- $\sigma, \tau \in SO(3)$ und $G := \langle \sigma, \tau \rangle$
- $\mu \in G \Rightarrow \mu = \sigma^{j_1} \tau^{k_1} \sigma^{j_2} \tau^{k_2} \ldots \sigma^{j_n} \tau^{k_n}$
- vollständig gekürzt
- Darstellung eindeutig $\Rightarrow G$ frei
- $\Leftrightarrow 1 \neq \sigma^{j_1} \tau^{k_1} \sigma^{j_2} \tau^{k_2} \ldots \sigma^{j_n} \tau^{k_n}$

Lemma

$SO(3)$ hat eine freie Untergruppe.

Freie Gruppen

Beweisskizze.

Setze $\sigma := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in SO(3)$ mit $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

zwei Induktionen
nach $N := \sum_{m=1}^{n} |j_m| + |k_m|$ und nach n

$\square$

Freie Gruppen

- $G = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$
- $H_1 := W(\sigma^{-1})$, $H_2 := W(\tau^{-1}\sigma)$, $H_3 := W(\sigma)$ und $H_4 := W(\tau\sigma^{-1})$

Freie Gruppen

- $\mu \in H_1 = W\left(\sigma^{-1}\right)$
- $\mu = \sigma^{-1}$
- $\mu = \sigma^{-1}\sigma^{-1}\ldots$
- $\mu = \sigma^{-1}\tau\ldots$
- $\mu = \sigma^{-1}\tau^{-1}\ldots$
- $\cancel{\mu = \sigma^{-1}\sigma\ldots}$
- $\Rightarrow \sigma H_1 = \{1\} \cup W\left(\sigma^{-1}\right) \cup W\left(\tau\right) \cup W\left(\tau^{-1}\right)$

Freie Gruppen

- $\tau H_2 = \tau W\left(\tau^{-1}\sigma\right) = W(\sigma)$
- $\Rightarrow G = \sigma H_1 \cup \tau H_2$
- analog: $G = \sigma^{-1} H_3 \cup \tau^{-1} H_4$

Die Bahnen der Gruppenwirkung

- $\mu x \in A$ $(x \in A)$
- Bahn von $x \in A$: $Gx := \{gx : g \in G\}$
- Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x \in Gy$ $(x, y \in A)$

Die Bahnen der Gruppenwirkung

- $(O_i)_{i \in I}$ Äquivalenzklassen ohne $\{0\}$
- wähle $x_i \in O_i$ aus, $\Rightarrow Gx_i = O_i$ (Auswahlaxiom)
- $X := \{x_i : i \in I\} \Rightarrow GX = A \setminus \{0\}$

Die Bahnen der Gruppenwirkung

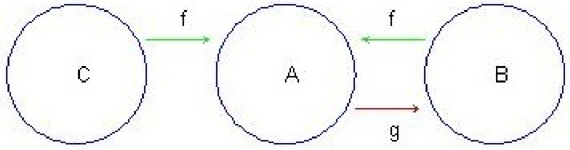
- $A_1 := H_1 X \cup \{0\}$, $\tilde{A}_2 := H_2 X$, $\tilde{A}_3 := H_3 X$, $A_4 := H_4 X$
- $\Rightarrow \sigma A_1 \cup \tau \tilde{A}_2 = \sigma H_1 X \cup \sigma\{0\} \cup \tau H_2 X = GX \cup \{0\} = A$
- $\sigma A_1 \cap \tau A_2 = \emptyset! \Rightarrow A_2$
- ähnlich: $A = \{0\} \cup \sigma^{-1} A_3 \cup \tau^{-1} A_4$ und $\sigma^{-1} A_3 \cap \tau^{-1} A_4 = \emptyset$
- $x \in X \Rightarrow x \notin A_i$

Der Beweis

- $B_1 := \sigma A_1 + b$, $B_2 := \tau A_2 + b$
- $C_1 := \sigma^{-1} A_3 + c$, $C_2 := \tau^{-1} A_4 + c$
- $f : D := B \cup C \to A$ Umkehrfunktion davon
- $x^* \in A \setminus \bigcup_i A_i$: $f(c) := x^*$
- $C_3 := \{c\}$
- $f(B_1), f(B_2), f(C_1), f(C_2), f(C_3)$ paarweise disjunkt
- f, eingeschränkt auf B_i oder C_j, ist eine Bewegung

Der Beweis(Skizze)

- $g : A \to B \cup C$ Translation um b, $g(A) = B$
- $x \in A$, $y \in D$: $f(y) = x$: y Vorgänger von x
- $x \in A$ Vorgänger von $y \in D$, falls $g(x) = y$
- Vorgängersuche für einen Punkt $x \in A \cup D$
- bricht in A oder D ab oder endet nicht



Der Beweis(Skizze)

$$A_f := \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet in D}\}$$
$$A_g := \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet in A}\}$$
$$A_\infty := \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet nicht}\}$$
$$D_f := \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet in D}\}$$
$$D_g := \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet in A}\}$$
$$D_\infty := \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet nicht}\}$$

Der Beweis(Skizze)

- $B_i' := B_i \cap (D_f \cup D_\infty)$ $(i = 1, 2)$, $B_3' := B \cap D_g$
- B_1', B_2' und B_3' paarweise disjunkt

$$B = B_1 \cup B_2 = B_1' \cup B_2' \cup B_3'$$

- mit C verfahren wir ähnlich

Der Beweis (Skizze)

$$
\begin{aligned}
A'_i &:= f(B'_i)\ (i = 1, 2) \\
A'_3 &:= g^{-1}(B'_3) \\
A'_{j+3} &:= f(C'_j)\ (j = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

paarweise disjunkt und

$$A = A_f \cup A_g \cup A_\infty = A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \cup A'_4 \cup A'_5 \cup A'_6$$

$\square$

Anmerkungen

- Beweis mit fünf Mengen möglich, mit vier Mengen nicht

Satz (Banach und Tarski)

Sei $d \geq 3$ und $A, D \subset \mathbb{R}^d$ seien beschränkte Mengen mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ und paarweise disjunkte Mengen $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^d$ so, dass $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ und $A_i \cong D_i$ $(i = 1, \dots, n)$.