KONSTRUKTION VON MASSEN

MARCUS HEITEL

1. Einleitung

Wir wollen im Folgenden das Lebesguemaß konstruieren. Dieses soll die Eigenschaft $\lambda\big([a,b)\big) = b - a$ für $a, b \in \mathbb{R}$ besitzen. Nun ist ein Maß aber auf einer σ-Algebra definiert (hier die Borel-σ-Algebra, welche nicht nur Intervalle aus $\mathbb{R}$ enthält). Wie wir sehen werden, bietet der Fortsetzungssatz von Carathéodory die Möglichkeit dieses Maß zu konstruieren.

2. Prämass

Als erstes benötigen wir ein paar neue Begriffe, unter anderem den Begriff des Prämaßes. Dieses soll ein allgemeiner Begriff als das Maß, das heißt, es ist nicht nur auf σ-Algebren definiert, sondern auch auf Ringen.

Im Folgenden sei Ω eine beliebige Menge.

Definition 2.1. Ein *Ring* (über Ω) $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein Menge von Teilmengen von Ω derart, dass gilt:

(i) $\mathcal{R} \neq \emptyset$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{R}$

Bemerkung 2.2. Der in Definition 2.1 definierte Ring $\mathcal{R}$ ist ein *Unterring* von $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle, \cap)$ im Sinne der Algebra mit der Verknüpfung $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Mutliplikation , denn $A \triangle B = (A\backslash B) \cup (B \backslash A)$ und $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.

Satz 2.3. *Algebren sind genau die Ringe, die die Grundmenge Ω enthalten.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine Algebra. $\Omega = \emptyset^C \in \mathcal{F}$ nach (i) und (ii). Folglich enthält jede Algebra die Menge Ω. Weiter gilt $A \cup B \in \mathcal{F}$ nach (iii) und $A \backslash B = A \cap B^C = (A^C \cup B)^C \in \mathcal{F}$ nach (iii) und (ii). Sei nun $\mathcal{R}$ ein Ring, der Ω enthält, dann gilt: $\emptyset = \Omega \backslash \Omega \in \mathcal{R}$, $\quad A^C = \Omega \backslash A \in \mathcal{R}$ für $A \in \mathcal{R}$ und $A \cup B \in \mathcal{R}$ für $A, B \in \mathcal{R}$ per Definition eines Ringes. $\square$

Definition 2.4. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Ein *Inhalt* ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ derart, dass gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A_i \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt $\quad (i \in \{1, \ldots, n\})$

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Definition 2.5. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Ein *Prämaß* ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ derart, dass gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A_i \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt $(i \in \mathbb{N})$, sodass $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ (gilt i.A. nicht!)

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

Bemerkung 2.6. Ein Prämaß ist kein Maß. Beschränkt man ein Prämaß auf eine σ-Algebra, so ist es auch ein Maß.

Beispiel 2.7. (Lebegue'sches Prämaß)
Sei

$$\mathcal{R} = \{\bigcup_{i=1}^{n} [a, b) \,|\, a \leq b,\ a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

die Menge aller endlichen Vereinigungen von halboffenen Intervallen in $\overline{\mathbb{R}}$ und $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\lambda(\emptyset) = 0 \quad \text{ und für } A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \in \mathcal{R} \ \text{ gilt: } \lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Dabei ist $a_i < b_i$ und $[a_i, b_i)$ disjunkt für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $\mathcal{R}$ ein Ring und λ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ und wird als *Lebegue'sches Prämaß* bezeichnet.

Bemerkung 2.8. Das Lebesgue'sches Prämaß kann mit dem Fortsetzungssatz zum Lebesguemaß fortgesetzt werden.

3. Äusseres Mass

Ziel ist es nun ein Prämaß zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortzusetzen. Dafür brauchen wir Mengen, die messbar sind. Carathéodory zeigte die Messbarkeit von Mengen mit einer Abbildung, die auf der ganzen Potenzmenge definiert ist - das sogenannte äußere Maß.

Definition 3.1. Ein *äußeres Maß* auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine Mengenfunktion $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ derart, dass gilt:

(i) $\nu(\emptyset) = 0$
(ii) $\forall\, A \subset B \subset \Omega$ gilt: $\quad \nu(A) \leq \nu(B) \quad$ (Monotonie)
(iii) Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Folge, dann gilt $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$ (σ-Subadditivität)

Bemerkung 3.2. Ein äußeres Maß ist kein Maß .

Beispiel 3.3. (Erzeugtes äußeres Maß)
Ist durch μ auf einer Algebra oder einem Ring $\mathcal{R}$ ein *Prämaß* gegeben, so gilt:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) \,\Big|\, \tilde{A}_i \in \mathcal{R}, \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i \right\}, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

ist ein *äußeres Maß*, welches wir das von μ erzeugte äußeres Maß nennen.

Beweis. (i) $\mu^*(\emptyset) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) \,\Big|\, \tilde{A}_i \in \mathcal{R}, \quad \emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i \right\} = \mu(\emptyset) = 0$,denn $\emptyset = \tilde{A} \backslash \tilde{A} \in \mathcal{R} \quad (\tilde{A} \in \mathcal{R})$

(ii) Sei $A \subset B \subset \Omega$, dann ist $\mathcal{B} := \Big\{(\tilde{A_i}) \subset \mathcal{R} : \quad B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A_i}\Big\} \subset \mathcal{A} := \Big\{(\tilde{A_i}) \subset \mathcal{R} : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A_i}\Big\}$ und damit auch
$\mu^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A_i}) \,\Big|\, \tilde{A_i} \in \mathcal{R}, \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A_i}\Big\}$
$\leq \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{B_i}) \,\Big|\, \tilde{B_i} \in \mathcal{R}, \quad A \subset B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B_i}\Big\} = \mu^*(B)$

(iii) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Definiere $\mathcal{U}(A_i)$ als Menge aller Folgen $(\tilde{A_{ij}})_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$, welche A_i überdecken. Sei weiter oBdA $\mu^*(A_i) < \infty \Rightarrow \mathcal{U}(A_i) \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0. \forall\, i \in \mathbb{N} \quad \exists\, (\tilde{A_{ij}})_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A_i)$ mit

$$\mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\tilde{A_{ij}}) \qquad \text{(i fest)}$$

Die Doppelfolge $(\tilde{A}_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ liegt dann in $\mathcal{U}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)$
$\Rightarrow \quad \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_{ij}) \overset{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$
Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 3.4. Im letzten Beispiel gilt der Beweis auch für einen Inhalt, nicht nur für Prämaße. Deshalb kann man auch durch Inhalte äußere Maße erzeugen. Im Beweis des Fortsetzungssatzes werden wir aber ein Prämaß betrachten, weshalb das obige Beispiel auch so gewählt wurde.

4. Der Fortsetzungssatz von Carathéodory

Wir werden im Folgenden eine σ-Algebra konstruieren, auf der das äußere Maß zu einem Maß wird. Dabei werden die Mengen, die sich in dieser σ-Algebra befinden, durch folgende Definition ausgezeichnet:

Definition 4.1. Sei ν ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ und $A \subset \Omega$. Dann heißt A *ν-messbar*, falls $\forall\, B \subset \Omega$ gilt:

$$\nu(B) = \nu(A \cap B) + \nu(B \setminus A)$$

Die Menge aller ν-messbaren Mengen wird mit Σ_ν bezeichnet.

Satz 4.2. *(Carathéodory[1])*
Σ_ν ist eine σ-Algebra und $\nu_{|\Sigma_\nu}$ ist ein Maß.

Beweis. Wir rechnen zuerst die Axiome einer Algebra nach:
(i) $\emptyset \in \Sigma_\nu$, denn $\nu(B) = \nu(\emptyset \cap B) + \nu(B \setminus \emptyset) \quad (B \subset \Omega)$
(ii) Sei $A \in \Sigma_\nu \Rightarrow A^C \in \Sigma_\nu$, denn: $\nu(B) = \nu(A \cap B) + \nu(B \setminus A) = \nu(B \setminus A^C) + \nu(A^C \cap B) \quad (B \subset \Omega)$
(iii) Seien $A_1, A_2 \in \Sigma_\nu$. Dann gilt nach Definition 4.1 insbesondere für die Wahl von $B \cap A_2$ statt B mit $B \subset \Omega$:

$$\nu(B \cap A_2) = \nu((B \cap A_2) \cap A_1) + \nu((B \cap A_2)\backslash A_1)$$

Ebenso folgt mit der Wahl von $B\backslash(A_1 \cap A_2)$ anstelle von B:

$$\begin{aligned}\nu\big(B\backslash(A_1 \cap A_2)\big) &= \nu\Big(\big(B\backslash(A_1 \cap A_2)\big) \cap A_2\Big) + \nu\Big(\big(B\backslash(A_1 \cap A_2)\big)\backslash A_2\Big) \\ &= \nu\big(B \cap (A_1^C \cup A_2^C) \cap A_2\big) + \nu\big(B \cap (A_1^C \cup A_2^C) \cap A_2^C\big) \\ &= \nu\big((B \cap A_1^C \cap A_2) \cup (B \cap A_2 \cap A_2^C)\big) \\ &\quad + \nu\big((B \cap A_1^C \cap A_2^C) \cup (B \cap A_2^C)\big) \\ &= \nu\big((B \cap A_2)\backslash A_1\big) + \nu(B\backslash A_2)\end{aligned}$$

[1] **Constantin Carathéodory**(13.9.1873 - 2.2.1950): griechischer Mathematiker

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \nu(B\cap A_2)+\nu(B\backslash A_2)\\ &= \nu\big((B\cap A_2)\cap A_1\big)+\nu\big((B\cap A_2)\backslash A_1\big)\\ &\quad+\nu\big(B\backslash(A_1\cap A_2)\big)-\nu\big((B\cap A_2)\backslash A_1\big)\\ &= \nu\big((B\cap(A_1\cap A_2)\big)+\nu\big(B\backslash(A_1\cap A_2)\big)\\ &\Rightarrow (A_1\cap A_2)\in\Sigma_\nu\end{aligned}$$

und damit gilt mit (ii): $(A_1\cup A_2)=(A_1^C\cap A_2^C)^C\in\Sigma_\nu$
Also ist Σ_ν eine Algebra.

Als nächstes zeigen wir, dass ν endlich additiv ist.
$A_1,A_2\in\Sigma_\nu$ mit $A_1\cap A_2=\emptyset$ dann gilt mit der Definition der ν-Messbarkeit für die Wahl von $B\cap(A_1\cup A_2)$ statt allgemeinem $B\subset\Omega$:

$$\begin{aligned}\nu\big(B\cap(A_1\cup A_2)\big) &= \nu(B\cap A_1)+\nu\Big(\big(B\cap(A_1\cup A_2)\big)\backslash A_1\Big)\\ &= \nu(B\cap A_1)+\nu\Big(B\cap\big((A_1\cap A_1^C)\cup(A_2\cap A_1^C)\big)\Big)\\ &= \nu(B\cap A_1)+\nu\big(B\cap(A_2\backslash A_1)\big)\\ &= \nu(B\cap A_1)+\nu(B\cap A_2)\end{aligned}$$

Für $B=\Omega$ folgt dann $\nu(A_1\cup A_2)=\nu(A_1)+\nu(A_2)$
Nun wollen wir zeigen, dass es sich sogar um eine σ-Algebra handelt. Seien $A_i\in\Sigma_\nu$ und $A:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$. Da wir eine Algebra haben, gilt: $\bigcup_{i=1}^n A_i\in\Sigma_\nu\quad(n\in\mathbb{N})$. Weiter folgt mit der endlichen Additivität und $C_n:=\bigcup_{i=1}^n A_i$ für $B\subset\Omega$

$$\nu(B)=\nu(B\cap C_n)+\nu(B\backslash C_n)=\nu(B\backslash C_n)+\sum_{i=1}^n\nu(B\cap A_i)\geq\nu(B\backslash A)+\sum_{i=1}^n\nu(B\cap A_i)$$

Lassen wir nun $n\to\infty$ laufen, so erhalten wir:

$$\nu(B)\geq\nu(B\backslash A)+\sum_{i=1}^\infty\nu(B\cap A_i)$$

und aufgrund der Subadditivität von ν

$$\nu(B)\leq\nu(B\cap A)+\nu(B\backslash A)\leq\nu(B\backslash A)+\sum_{i=1}^\infty\nu(B\cap A_i)\qquad(*)$$

Deshalb müssen die Ungleichungen Gleichungen gewesen sein, womit gilt

$$\nu(B)=\nu(B\cap A)+\nu(B\backslash A)$$

Damit ist $A\in\Sigma_\nu$ und Σ_ν eine σ-Algebra. ν ist ein Maß , was aus $(*)$ mit $B=A$ folgt (σ-Additivität). □

Satz 4.3. (Fortsetzungssatz von Carathéodory)
Gilt $\nu=\mu^*$ von Beispiel 3.3, so enthält Σ_ν den Ring $\mathcal{R}$, auf der das Prämaß μ defniert ist und $\nu_{|\mathcal{R}}=\mu$.

Beweis. Für $A\in\mathcal{R}$ und $B\subset\Omega$ gilt $\mu^*(A)=\mu(A)$ und aus der Subadditivität folgt

$$\mu^*(B)\leq\mu^*(A\cap B)+\mu^*(B\setminus A)$$

Zu $\varepsilon>0$ existiert eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{R}$ mit $B\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$ und $\sum_{i=1}^\infty\mu^*(A_i)\leq\mu^*(B)+\varepsilon$ (nach der Definition von μ^*). Aus der Subadditivität von μ^* folgt dann:

$$\mu^*(B\cap A)\leq\sum_{i=1}^\infty\mu^*(A_i\cap A)=\sum_{i=1}^\infty\mu(A_i\cap A),$$

$$\mu^*(B\backslash A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i\backslash A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i\backslash A)$$

und wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &\le \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B\backslash A) \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_i \cap A)) + (\mu(A_i\backslash A)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \\ &\le \mu^*(B) + \varepsilon \end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $A \in \Sigma_\nu$ und $\nu_{|\mathcal{R}} = \mu$ □

Bemerkung 4.4.
- Es ist nicht nötig, dass μ ein Prämaß ist, es kann auch ein Inhalt sein. Das Prämaß wurde dennoch verwendet, weil so umgekehrt gezeigt werden kann, dass zu jedem Prämaß auf einem Ring auch eine σ-Algebra existiert, die den Ring umfasst und ein Maß, welches eingeschränkt auf den Ring gleich dem Prämaß ist.
- Mithilfe des Fortsetzungssatzes kann das Lebesgue'sche Prämaß aus Beispiel 2.7 zum Lebesguemaß fortgesetzt werden.
- Eine weitere Anwendung ist das Zeigen der Existenz von Produktmaßen.

Satz 4.5. *(Eindeutigkeitssatz)*
Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine durchschnittsstabile Familie, das heißt für $A, B \in \mathcal{E}$ gilt auch $A \cap B \in \mathcal{E}$. $\Sigma = \sigma(\mathcal{E})$ sei die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. Seien weiter $\mu, \nu : \Sigma \to [0, \infty]$ Maße derart, dass $\mu(E) = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$. Es gebe $E_k \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_k) < \infty$ sodass $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$. Dann ist $\mu = \nu$.

Bemerkung 4.6. Der Eindeutigkeitssatz liefert zusammen mit dem Fortsetzungssatz auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger eine eindeutige Fortsetzung von σ-endichem $(\mathcal{R}, \mu)$ auf $(\Sigma_\nu, \nu_{|\Sigma_\nu})$.

Literatur

[Bal10] Werner Balser, *Maßtheorie*, Skript zur Vorlesung an der Universität Ulm, `http://cantor.mathematik.uni-ulm.de/m5/balser/Skripten/masstheorie.pdf`, 2010.

[Bau92] Heinz Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter Lehrbuch, Berlin, 1992.

[Bog07] Vladimir I. Bogachev, *Measure Theory*, Springer Verlag, 2007.

[Els08] Jürgen Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, 2008.