Konstruktion von Maßen

Marcus Heitel

Uni Ulm

29. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1. Inhalt und Prämaß
2. Äußeres Maß
3. Fortsetzungssatz
4. Quellen & Literatur

Motivation

- Ziel: Maß λ mit $\lambda([a, b)) = b - a$
- Problem: σ-Algebra
- Idee: 'Vorstufe' zu Maß + σ-Algebra

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Ring

Definition 1.1 (Ring).

Ring (über Ω) $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$:

(i) $\mathcal{R} \neq \emptyset$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{R}$

Ring

Definition 1.1 (Ring).

Ring (über Ω) $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$:

(i) $\mathcal{R} \neq \emptyset$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{R}$

Satz 1.2.

Algebra $=$ *Ring mit* Ω

Beweis.

$\mathcal{F}$ Algebra. $\Omega = \emptyset^C \in \mathcal{F}$.
$A \cup B \in \mathcal{F}$ und $A \backslash B = A \cap B^C = (A^C \cup B)^C \in \mathcal{F}$
Nun $\mathcal{R}$ Ring mit Ω
$\emptyset = \Omega \backslash \Omega \in \mathcal{R}, \quad A^C = \Omega \backslash A \in \mathcal{R}$ für $A \in \mathcal{R}$ und $A \cup B \in \mathcal{R}$ für $A, B \in \mathcal{R}$. □

Inhalt/Prämaß

Definition 1.3 (Inhalt/Prämaß).

$\mathcal{R}$ Ring. *Inhalt* $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ derart, dass gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A_i \in \mathcal{R}$ p. d. $\quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Zusätzlich:

(iii) $A_i \in \mathcal{R}$ p.d. $(i \in \mathbb{N})$, sodass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

dann *Prämaß*.

Lebesgue'sches Prämaß

Beispiel 1.4.

$$\mathcal{R} = \{\bigcup_{i=1}^{n} [a, b) \mid a \leq b,\ a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\lambda(\emptyset) = 0 \quad \text{und für } A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \in \mathcal{R} \text{ gilt: } \lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Dabei $a_i < b_i$ & $[a_i, b_i)$ disjunkt. Dann $\mathcal{R}$ Ring und λ Prämaß.

Äußeres Maß

- Abb. von Potenzmenge $\to$ Maß
- Potenzmenge $\to$ σ-Algebra

Definition 2.1 (Äußeres Maß).

Äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ derart, dass gilt:

(i) $\nu(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \quad \nu(A) \leq \nu(B) \quad$ (Monotonie)

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$
(σ-Subadditivität)

Erzeugtes äußeres Maß

Beispiel 2.2.

μ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \Rightarrow$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) \,\middle|\, \tilde{A}_i \in \mathcal{R}, \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i \right\}, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

äußeres Maß (von μ erzeugte äußeres Maß).

Beweis.

(i) $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

(ii) Sei $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mathcal{B} := \left\{(\tilde{A}_i) \subset \mathcal{R} : \quad B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\right\} \subset$

$$\subset \mathcal{A} := \left\{(\tilde{A}_i) \subset \mathcal{R} : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\right\}$$

$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

Erzeugtes äußeres Maß

Fortsetzung des Beweises

(iii) σ-Subaditivität (mit Überdeckung $+\ \varepsilon$)

Bemerkung 2.3.

- Inhalt statt Prämaß
- Lebesgue'sches Prämaß$\rightarrow$ äußeres Maß
- Äußeres Maß $\rightarrow$ Messbarkeit

ν-messbar

Definition 3.1 (ν-messbar).

ν äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ und $A \subset \Omega$. Dann A *ν-messbar*, falls $\forall\, B \subset \Omega$ gilt:

$$\nu(B) = \nu(A \cap B) + \nu(B \setminus A)$$

$\Sigma_\nu = \{A \subset \Omega : A \ \nu\text{-messbar}\}$

Satz 3.2 (Carathéodory).

Σ_ν σ-Algebra und $\nu_{|\Sigma_\nu}$ Maß.

Beweis.

Schritt 1: Σ_ν Algebra

Schritt 2: $\nu_{|\Sigma_\nu}$ endlich additiv

Schritt 3: Σ_ν σ-Algebra und $\nu_{|\Sigma_\nu}$ Maß

$A_i \in \Sigma_\nu$ und $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $C_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$.

$$\nu(B) = \nu(B \setminus C_n) + \nu(B \cap C_n) = \nu(B \setminus C_n) + \sum_{i=1}^{n} \nu(B \cap A_i)$$

$$\geq \nu(B \setminus A) + \sum_{i=1}^{n} \nu(B \cap A_i) \quad (B \subset \Omega)$$

$n \to \infty \Rightarrow$

$$\nu(B) \geq \nu(B \setminus A) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B \cap A_i)$$

Fortsetzung des Beweises

Subadditivität von $\nu \Rightarrow$

$$\nu(B) \leq \nu(B \cap A) + \nu(B \setminus A) \leq \nu(B \setminus A) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B \cap A_i) \qquad (*)$$

Deshalb: Gleichungen in $(*)$

$$\nu(B) = \nu(B \cap A) + \nu(B \setminus A)$$

$\Rightarrow A \in \Sigma_\nu$ und Σ_ν σ-Algebra.
$B = A \Rightarrow \quad \nu$ Maß $\square$

Fortsetzungssatz von Carathéodory

Satz 3.3 (Fortsetzungssatz von Carathéodory).

$\nu = \mu^*$ *(erz. äußeres Maß)* $\Rightarrow \mathcal{R} \subset \Sigma_\nu$ *und* $\nu_{|\mathcal{R}} = \mu$.

Beweis.

$A \in \mathcal{R}$, $B \subset \Omega \Rightarrow$

$$\mu^*(A) = \mu(A) \text{ und } \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A)$$

Zu $\varepsilon > 0$ ex. Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \leq \mu^*(B) + \varepsilon \Rightarrow$

$$\mu^*(B \cap A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap A),$$

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \setminus A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A)$$

Fortsetzung des Beweises

Damit:

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &\leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \backslash A)\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_i \cap A)) + (\mu(A_i \backslash A))\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\\ &\leq \mu^*(B) + \varepsilon\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow A \in \Sigma_\nu$ und $\nu_{|\mathcal{R}} = \mu$ $\square$

Folgerung

Bemerkung 3.4.

- Inhalt statt Prämaß
- Lebesguemaß λ mit $\lambda([a, b)) = b - a$ auf $\Sigma = \mathcal{B}$
- Produktmaße (Zeigen der Existenz)

Eindeutigkeit

Satz 3.5 (Eindeutigkeitssatz).

$\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil. $\Sigma = \sigma(\mathcal{E})$.
Seien $\mu, \nu : \Sigma \to [0, \infty]$ Maße mit $\mu(E) = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$. $E_k \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_k) < \infty$ sodass $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$.
$\Rightarrow \mu = \nu$

Bemerkung 3.6.

Fortsetzungssatz + Eindeutigkeitssatz = eindeutige Fortsetzung

Quellen & Literatur

- Werner Balser, *Maßtheorie*, Skript zur Vorlesung an der Universität Ulm, `http://cantor.mathematik.uni-ulm.de/m5/balser/Skripten/masstheorie.pdf`, 2010.
- Heinz Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter Lehrbuch, Berlin, 1992.
- Vladimir I. Bogachev, *Measure Theory*, Springer Verlag, 2007.
- Jürgen Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, 2008.