DER SATZ VON VITALI-HAHN-SAKS

ROMAN KOHLS

1. Einleitung

Wir zeigen den Satz von Vitali-Hahn-Saks, der besagt, dass für jede Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Maßen auf einem Messraum (Ω,Σ), deren Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$ für alle $A\in\Sigma$ existiert und endlich ist, der Limes $\mu(A) := \lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$ ein Maß auf (Ω,Σ) definiert. Zu diesem Ergebnis steuerten viele namhafte Mathematiker ihre Erkenntnisse bei, darunter Lebesgue, Vitali, Hahn, Nikodym und Saks. Vitali betrachte den Fall einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen, die fast überall und deren Integrale über alle messbaren Mengen konvergieren. Ein großer Fortschritt gelang Lebesgue, der, ohne eine Forderung an die Konvergenz fast überall, aus der Konvergenz der Integrale von f_n über alle messbaren Mengen gegen Null auf die gleichmäßige absolute Stetigkeit dieser Integrale schloss – dabei bedeutet die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar oder auch die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt gleichmäßig absolut stetige Integrale, dass der Betrag des Integrals von f_n über eine messbare Menge beliebig klein gemacht werden kann, falls das Maß dieser Menge kleiner als ein von n unabhängiger Wert ist. Hahn wies nach, dass es genügt, die Existenz eines endlichen Grenzwerts der Integrale über alle messbaren Mengen zu fordern. Schließlich bewies Nikodym die σ-Additivität des Grenzwerts im Falle einer mengenweise konvergenten Folge.
Wir beweisen den Satz folgendermaßen: Um Mengen die sich nur um eine Nullmenge unterscheiden zu identifizieren, führen wir im folgenden Abschnitt eine Äquivalenzrelation auf der σ-Algebra Σ ein. Auf der Menge der Äquivalenzklassen Σ/μ lässt sich dann eine Metrik, die Fréchet-Nikodym-Metrik, definieren, so dass der Raum Σ/μ vollständig ist. Zusätzlich zeigen wir den Satz von Baire. Im dritten Abschnitt benutzen wir diese Tatsachen, um für eine Folge integrierbarer Funktionen, deren Integrale für alle messbaren Mengen konvergieren, zu beweisen, dass die Folge gleichmäßig absolut stetige Integrale besitzt. Hieraus schließen wir die σ-Additivität des Grenzwertes dieser Integrale. Im letzten Abschnitt führen wir die Aussage des Satzes von Vitali-Hahn-Saks mithilfe des Satzes von Radon-Nikodym auf den Fall einer Folge von Funktionen, auf die wir unsere Erkenntnisse aus dem dritten Abschnitt anwenden können, zurück.

2. Der metrische Raum Σ/μ und der Bairesche Kategoriensatz

Sei (Ω,Σ,μ) ein endlicher Maßraum. Es soll eine Metrik auf Σ eingeführt werden. Dazu sei an die Definition der symmetrischen Differenz und einige ihrer Eigenschaften erinnert.

Definition 2.1. Seien A und B Mengen. Die Menge $A\triangle B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ heißt symmetrische Differenz der Mengen A und B.

Lemma 2.2. *Seien A, B und C Mengen. Dann gilt:*

(i) $A \triangle A = \emptyset$
(ii) $A \triangle \emptyset = A$
(iii) $A \triangle B = B \triangle A$ *(Kommutativität)*
(iv) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ *(Assoziativität)*
(v) $A \triangle C = (A \triangle B) \triangle (B \triangle C)$
(vi) $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

Beweis. (i) bis (iv) folgen aus der Definition der symmetrischen Differenz und durch direktes Nachrechnen. (v) folgt unmittelbar aus $(i), (ii)$ und (iv). Genauso folgt (vi) direkt aus (v). □

Aus Lemma 2.2 (iii) folgt sofort, dass die Abbildung

$$d : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+, \ (A, B) \longmapsto \mu(A \triangle B)$$

symmetrisch ist. Auch die Dreiecksungleichung für d folgt direkt aus Lemma 2.2 (vi), während die Definitheit nicht gilt.

Beispiel 2.3. Sei der endliche Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_1)$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$ und dem Dirac-Maß δ_1 im Punkt 1 gegeben. Es gilt offenbar $\delta_1([0,1] \triangle [1,2]) = 0$, aber $[0,1] \neq [1,2]$. Damit gilt für $d(A,B) := \delta_1(A \triangle B), \ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Definitheit nicht.

Gilt $\mu(A \triangle B) = 0$ für $A, B \in \Sigma$, so ist $A \triangle B$ eine μ-Nullmenge, das heißt die Mengen A und B unterscheiden sich nur um eine Menge vom Maß Null. Wir führen eine Relation auf Σ ein, um solche Mengen zu identifizieren, und erhalten so die Definitheit für die oben definierte Abbildung d.

Satz 2.4. *Sei* (Ω, Σ, μ) *ein endlicher Maßraum. Sei* $\sim$ *eine Relation auf* Σ*, die durch* $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$ *definiert ist. Dann ist* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Reflexivität bzw. Symmetrie von $\sim$ folgt aus Lemma 2.2 (i) bzw. (iii). Um die Transitivität zu zeigen, seien nun $A \sim B$ und $B \sim C$ für $A, B, C \in \Sigma$. Mit Lemma 2.2 (vi) gilt

$$\mu(A \triangle C) \leq \mu(A \triangle B) + \mu(B \triangle C) = 0$$

und damit folgt $A \sim C$ aus der Positivität des Maßes. □

Definition 2.5. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $\sim$ die Äquivalenzrelation aus Satz 2.4. Für $A \in \Sigma$ bezeichnen wir mit

$$\bar{A} := \{B \in \Sigma : B \sim A\}$$

die Äquivalenzklasse von A bezüglich $\sim$ und mit

$$\Sigma/\mu := \{\bar{B} : B \in \Sigma\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$.

Insgesamt halten wir fest

Satz 2.6. *Sei* (Ω, Σ, μ) *ein endlicher Maßraum. Dann ist die Abbildung*

$$d : \Sigma/\mu \times \Sigma/\mu \longrightarrow \mathbb{R}_+, \ (\bar{A}, \bar{B}) \longmapsto \mu(A \triangle B)$$

eine Metrik und $(\Sigma/\mu, d)$ *ist ein metrischer Raum.*

Beweis. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass d wohldefiniert ist. Seien $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \Sigma$ und sei $\bar{A}_1 = \bar{A}_2, \ \bar{B}_1 = \bar{B}_2$. Anwenden von Lemma 2.2 (vi) ergibt

$$\mu(A_1 \triangle B_1) \leq \mu((A_1 \triangle A_2) + \mu(A_2 \triangle B_1).$$

Erneutes Anwenden von Lemma 2.2 (vi) führt zu

$$\mu(A_1 \triangle B_1) \leq \mu(A_1 \triangle A_2) + \mu(A_2 \triangle B_2) + \mu(B_2 \triangle B_1).$$

Wegen $\bar{A}_1 = \bar{A}_2,\ \bar{B}_1 = \bar{B}_2$ ist also

$$\mu(A_1 \triangle B_1) \leq \mu(A_2 \triangle B_2).$$

Analog zeigt man:

$$\mu(A_2 \triangle B_2) \leq \mu(A_1 \triangle B_1).$$

Somit haben wir insgesamt

$$\mu(A_1 \triangle B_1) = \mu(A_2 \triangle B_2),$$

was die Wohldefiniertheit von d zeigt. □

Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt.

Definition 2.7. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Die Abbildung

$$d : \Sigma/\mu \times \Sigma/\mu \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ (\bar{A}, \bar{B}) \longmapsto \mu(A \triangle B)$$

heißt Fréchet-Nikodym-Metrik.

Bemerkung 2.8. Für $\bar{A}, \bar{B} \in \Sigma/\mu$ setzt man

$$\bar{A} \cap \bar{B} := \overline{A \cap B}$$
$$\bar{A} \cup \bar{B} := \overline{A \cup B}$$
$$\bar{A}^{\mathcal{C}} := \overline{A^{\mathcal{C}}}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass dadurch Durchschnitt, Vereinigung und Komplement auf Σ/μ wohldefiniert sind.

Im folgenden schreiben wir anstatt $\bar{A}$ auch einfach A, falls aus dem Kontext klar ist, dass $A \in \Sigma/\mu$ gemeint ist. Nun zeigen wir ein für das weitere wichtiges Resultat, die Vollständigkeit von $(\Sigma/\mu, d)$.

Satz 2.9. *Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und d die Fréchet-Nikodym-Metrik. Der metrische Raum $(\Sigma/\mu, d)$ ist vollständig.*

Beweis. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Σ/μ. Es genügt zu zeigen, dass es eine Teilfolge $(A_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $A \in \Sigma/\mu$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} d(A_{n_l}, A) = 0$ gilt. Mithilfe der Cauchy-Bedingung an $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir eine Teilfolge $(A_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ durch vollständige Induktion so konstruieren, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $k \geq m$ gilt

$$\mu(A_{n_k} \triangle A_{n_m}) < \frac{1}{2^m}. \tag{2.1}$$

Wähle nun

$$A := \limsup_{l\to\infty} A_{n_l} = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq l} A_{n_k}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen zuerst, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m \geq n_0$ gilt

$$\mu(\bigcup_{k\geq m} A_{n_k} \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Folge $(\bigcap_{l=1}^{N} \bigcup_{k\geq l} A_{n_k})_{N\in\mathbb{N}}$ fällt monoton gegen A, also gilt

$$\mu(\bigcup_{k\geq N} A_{n_k} \setminus A) = \mu(\bigcap_{l=1}^{N} \bigcup_{k\geq l} A_{n_k} \setminus A) = \mu(\bigcap_{l=1}^{N} \bigcup_{k\geq l} A_{n_k}) - \mu(A).$$

Aus der Stetigkeit des Maßes folgt daher die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(\bigcup_{k\geq n_0} A_{n_k} \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt auch für alle $m \geq n_0$

$$\mu(\bigcup_{k \geq m} A_{n_k} \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Nun zeigen wir noch: Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$

$$\mu(\bigcup_{k \geq m} A_{n_k} \setminus A_{n_m}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es gilt

$$\bigcup_{k \geq m} A_{n_k} \setminus A_{n_m} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(A_{n_{m+j}} \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{j-1} A_{n_{m+i}} \right) \right) \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{n_{m+j}} \setminus A_{n_{m+j-1}}.$$

Mit $\mu(A_{n_{m+j}} \setminus A_{n_{m+j-1}}) \leq \mu(A_{n_{m+j}} \triangle A_{n_{m+j-1}})$ und (2.1) folgt nun

$$\mu(\bigcup_{k \geq m} A_{n_k} \setminus A_{n_m}) \leq \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{n_{m+j}} \setminus A_{n_{m+j-1}}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n_{m+j}} \triangle A_{n_{m+j-1}}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

konvergiert, gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$

$$\mu(\bigcup_{k \geq m} A_{n_k} \setminus A_{n_m}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit und (2.2) folgt nun insgesamt für alle $m \geq \max\{n_0, m_0\}$

$$\mu(A \triangle A_{n_m}) = \mu(A \setminus A_{n_m}) + \mu(A_{n_m} \setminus A) \leq \mu(\bigcup_{k \geq m} A_{n_k} \setminus A) + \mu(\bigcup_{k \geq m} A_{n_k} \setminus A_{n_m}) < \varepsilon.$$

$\square$

Wir schließen den Abschnitt mit dem Satz von Baire, den wir im nächsten Abschnitt auf den vollständigen metrischen Raum $(\Sigma/\mu, d)$ anwenden wollen. Vorab klären wir noch die Bezeichnungen für einige topologische Begriffe.

Definition 2.10. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $M \subset \Omega$ eine Menge.

(i) M heißt offen, falls es für alle $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass
$$U_\varepsilon(x) := \{y \in \Omega : d(x, y) < \varepsilon\} \subset M.$$
(ii) Für $x \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ heißt $U_\varepsilon(x) := \{y \in \Omega : d(x, y) < \varepsilon\}$ die ε-Umgebung von x.
(iii) M heißt abgeschlossen, falls $M^{\mathcal{C}}$ offen ist.
(iv) Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten, heißt abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M.
(v) Die Vereinigung aller offenen Teilmengen $O \subset M$ heißt offener Kern $\mathring{M}$ von M.

Satz von Baire 2.11. *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum. Seien $A_n \subset \Omega$ abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei*

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mathring{A}_{n_0} \neq \emptyset$.

Beweis. Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen $\mathring{A}_n$ ist leer für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch vollständige Induktion konstruieren wir für $n \in \mathbb{N}$ offene Umgebungen $U_{\varepsilon_n}(x_n)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\overline{U_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset U_{\varepsilon_n}(x_n)$
(ii) $\overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)} \cap A_j = \emptyset$ für alle $j = 1, ..., n$
(iii) $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$

Da nach der Annahme $\mathring{A}_1$ leer ist, ist $\Omega \setminus A_1$ nicht-leer. Also wähle ein $x_1 \in \Omega \setminus A_1$. Nun ist nach Voraussetzung $\Omega \setminus A_1$ offen und daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(x_1) \subset \Omega \setminus A_1$ gilt. Wähle nun $\varepsilon_1 < \min\{\varepsilon, 1\}$. Da $\varepsilon_1 < \varepsilon$ ist, ist die Menge $U_{\varepsilon_1}(x_1)$ echt in der Menge $U_\varepsilon(x_1)$ enthalten. Somit gilt auch

$$\overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)} \cap A_1 = \emptyset.$$

Seien nun U_{ε_k} für $k = 1, ..., n$ schon so konstruiert, dass die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt sind. Da der offene Kern $\mathring{A}_{n+1}$ von A_{n+1} leer ist, ist $U_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus A_{n+1}$ nicht-leer und nach Voraussetzung auch abgeschlossen. Wähle $x_{n+1} \in U_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus A_{n+1}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$U_\varepsilon(x_{n+1}) \subset U_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus A_{n+1}.$$

Wähle also $\varepsilon_{n+1} < \min\{\varepsilon, \frac{1}{n+1}\}$. Dann ist $U_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})$ echt in der Menge $U_\varepsilon(x_{n+1})$ enthalten, also haben wir

$$\overline{U_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset U_{\varepsilon_n}(x_n) \quad \text{und} \quad \overline{U_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \cap A_{n+1} = \emptyset.$$

Damit ist die Konstruktion der offenen Umgebungen $U_{\varepsilon_n}(x_n)$ beendet. Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Mittelpunkte der konstruierten ε-Umgebungen folgt aus den Eigenschaften (i) und (iii)

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{\min\{n, m\}}$$

für $n, m \in \mathbb{N}$. Das heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in Ω. Aus der Vollständigkeit von (Ω, d) folgt die Existenz eines $x \in \Omega$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Wegen Eigenschaft (i) ist $x \in \overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt aus Eigenschaft (ii), dass $x \notin A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, im Widerspruch zu $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

3. Gleichmässig absolut stetige Integrale

Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Ziel dieses Abschnitts ist, zu zeigen, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-integrierbarer Funktionen, für die der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu$$

für alle $A \in \Sigma$ existiert und endlich ist, gleichmäßig absolut stetige Integrale besitzt, das heißt, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\left| \int_A f_n \, d\mu \right| \le \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, falls $\mu(A) < \delta$ ist. Hieraus lässt sich dann die σ-Additvität der Mengenfunktion

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu, \ A \in \Sigma$$

folgern. Zuerst zeigen wir eine Charakterisierung für die σ-Additivität einer additiven Mengenfunktion.

Lemma 3.1. *Sei (Ω, Σ) ein Messraum und $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ eine additive Mengenfunktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *μ ist σ-additiv.*
(ii) *μ ist stetig in $\emptyset$, das heißt, falls $A_n \in \Sigma$, $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ ist, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.*

Beweis. Sei μ σ-additiv und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in Σ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Setze $B_n = A_n \setminus A_{n+1} \in \Sigma$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen B_n sind disjunkt und es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_1.$$

Also ist

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

konvergent. Somit erhalten wir

$$\lim_{N\to\infty} \mu(A_N) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{n=N}^{\infty} B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Aus (i) folgt also (ii).
Gelte nun (ii). Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen in Σ. Setze

$$A_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Nach Voraussetzung ist $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Da μ additiv und endlich ist, folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} (\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) - \mu(A_n)) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k),$$

also die σ-Additivität von μ. $\square$

Wir wiederholen den uns aus der Vorlesung Maßtheorie bekannten Satz von der Hahn-Zerlegung.

Satz 3.2. *Sei (Ω, Σ) ein Messraum. Sei $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ eine σ-additive Mengenfunktion. Dann existieren disjunkte Σ-messbare Mengen Ω^+ und Ω^- mit $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$, so dass für alle $A \in \Sigma$ gilt*

$$\nu(A \cap \Omega^+) \geq 0 \quad \textit{und} \quad \nu(A \cap \Omega^-) \leq 0.$$

Die Hahn-Zerlegung ist nicht eindeutig, da man jede ν-Nullmenge zu Ω^+ oder Ω^- hinzufügen kann. Ist $\Omega = \widetilde{\Omega}^+ \cup \widetilde{\Omega}^-$ eine weitere Hahn-Zerlegung, so gilt

$$\nu(A \cap \Omega^+) = \nu(A \cap \widetilde{\Omega}^+) \quad \text{und} \quad \nu(A \cap \Omega^-) = \nu(A \cap \widetilde{\Omega}^-)$$

für alle $A \in \Sigma$, denn $\Omega^+ \cap \widetilde{\Omega}^-$ und $\Omega^- \cap \widetilde{\Omega}^+$ sind ν-Nullmengen. Also sind die Mengenfunktionen, die durch $\nu^+(A) := \nu(A \cap \Omega^+)$ und $\nu^-(A) := -\nu(A \cap \Omega^-)$, $A \in \Sigma$ definiert sind, nicht-negativ und σ-additiv, also Maße. Damit erhält man für jede σ-additive reelle Mengenfunktion ν eine Darstellung als Differenz der Maße ν^+ und ν^-, die Hahn-Jordan-Zerlegung.
Wir definieren absolute Stetigkeit für den Fall von σ-additiven Mengenfunktionen und geben eine Charakterisierung davon an.

Definition 3.3. Seien μ und ν σ-additive Mengenfunktionen auf dem Messraum (Ω, Σ) mit den Hahn-Jordan-Zerlegungen $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $\nu = \nu^+ - \nu^-$. ν heißt absolut stetig bezüglich μ, falls

$$(\nu^+ + \nu^-)(A) = 0 \text{ ist für alle } A \in \Sigma \text{ mit } (\mu^+ + \mu^-)(A) = 0.$$

Wir schreiben dann auch $\nu \ll \mu$.

Lemma 3.4. *Sei $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ eine σ-additive Mengenfunktion und μ ein Maß auf dem Messraum (Ω, Σ). Dann ist ν genau dann absolut stetig bezüglich μ, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|\nu(A)| < \varepsilon$ für alle $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \delta$.*

Beweis. Angenommen es gibt $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Σ mit $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ und $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Setze

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n.$$

Da $A \subset \bigcup_{n\geq k} A_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\mu(A) = 0$. Da ν endlich ist, gilt aber

$$\nu(A) = \nu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \varepsilon,$$

im Widerspruch zu $\nu \ll \mu$.
Die Umkehrung ist trivial. □

Wir benötigen noch den Satz von Radon-Nikodym, der aus der Vorlesung Maßtheorie bekannt ist.

Satz von Radon-Nikodym 3.5. *Seien μ und ν endliche Maße auf dem Messraum (Ω, Σ). Dann ist ν genau dann absolut stetig bezüglich μ, wenn es eine μ-integrierbare Funktion f gibt, so dass für alle $A \in \Sigma$*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Für den folgenden zentralen Satz verallgemeinern wir den Satz von Radon-Nikodym auf den Fall, dass ν auch negative Werte annimmt. Ist $\nu = \nu^+ - \nu^-$ die Hahn-Jordan-Zerlegung von ν und ist ν absolut stetig bezüglich μ, so gilt offenbar $\nu^+ \ll \mu$ und $\nu^- \ll \mu$. Da ν^+ und ν^- Maße sind, folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym die Existenz μ-integrierbarer Funktionen f^+ und f^-, so dass für alle $A \in \Sigma$

$$\nu^+ = \int_A f^+ \, d\mu \quad \text{und} \quad \nu^- = \int_A f^- d\mu.$$

Dann ist $f = f^+ - f^-$ μ-integrierbar und es gilt für alle $A \in \Sigma$

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Wir bemerken noch, dass für eine μ-integrierbare Funktion f die Mengenfunktion ν, die gegeben sein soll durch

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \; A \in \Sigma,$$

nach dem Satz von Lebesgue σ-additiv ist. Außerdem ist ν dann absolut stetig bezüglich μ.

Satz 3.6. *Sei* (Ω, Σ, μ) *ein endlicher Maßraum. Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge* μ*-integrierbarer Funktionen, so dass für alle* $A \in \Sigma$ *die Folge*

$$\left(\int_A f_n \ d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

einen endlichen Grenzwert hat. Dann existiert eine μ*-integrierbare Funktion* f*, so dass für alle* $A \in \Sigma$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \ d\mu = \int_A f \ d\mu.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\left|\int_A f_n \ d\mu\right| \leq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, falls $\mu(A) < \delta$ ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Betrachte für $k, m \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_{km} = \left\{A \in \Sigma : \left|\int_A f_k - f_m \ d\mu\right| \leq \varepsilon\right\}.$$

Sei $\bar{M}_{km}$ die Menge der zu den Elementen von M_{km} zugehörigen Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim$ aus dem Satz 2.4. Mithilfe von Lemma 3.4 macht man sich klar, dass die $\bar{M}_{km}$ im metrischen Raum Σ/μ aus Satz 2.6 abgeschlossen sind. Damit ist auch

$$M_n = \bigcap_{k,m\geq n} \bar{M}_{km}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen in Σ/μ. Da die Folge

$$\left(\int_A f_n \ d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

nach Voraussetzung eine Cauchyfolge ist, gilt

$$\Sigma/\mu = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Nach dem Satz von Baire gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass der offene Kern von M_n nichtleer ist. Das heißt es gibt ein $B \in \Sigma$ und ein $r > 0$, so dass für alle $k, m \geq n$ gilt

$$\left|\int_A f_k - f_m \ d\mu\right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } A \in \Sigma \text{ mit } \mu(A\triangle B) < r. \tag{3.1}$$

Nach Lemma 3.4 existiert ein $\delta \in (0, r)$, so dass

$$\left|\int_A f_j \ d\mu\right| \leq \varepsilon \quad , \ j = 1, ..., n,$$

falls $\mu(A) \leq \delta$. Für $j > n$ können wir schreiben

$$\begin{aligned}\int_A f_j \ d\mu &= \int_A f_n \ d\mu + \int_A f_j - f_n \ d\mu \\ &= \int_A f_n \ d\mu + \int_{A\cup B} f_j - f_n \ d\mu - \int_{B\setminus A} f_j - f_n d\mu.\end{aligned}$$

Da $\mu(B\triangle(A \cup B)) = \mu(A \setminus B) \leq \mu(A)$ und $\mu(B\triangle(B \setminus A)) = \mu(A \cap B) \leq \mu(A)$ gilt, erhalten wir mit (3.1)

$$\left|\int_A f_j \ d\mu\right| < 3\varepsilon$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, falls $\mu(A) < \delta$ ist. Damit ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen. Betrachte nun die Mengenfunktion

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \; d\mu, \;\; A \in \Sigma.$$

Wir zeigen mithilfe von Lemma 3.1, dass ν σ-additiv ist. Da das Integral additiv ist, ist auch ν additiv. Seien $A_n \in \Sigma, \;\; A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Zu einem $\varepsilon > 0$ können wir nach dem ersten Teil des Beweises ein $\delta > 0$ so wählen, dass

$$\left| \int_B f_n \; d\mu \right| \leq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, falls $\mu(B) < \delta$ ist. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\mu(A_n) < \delta$ für alle $n \geq N$. Dann folgt $|\nu(A_n)| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Aus Lemma 3.1 folgt die σ-Additivität von ν. Offenbar ist ν absolut stetig bezüglich μ. Also folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym, dass es eine μ-integrierbare Funktion f gibt, so dass $\nu = f \cdot \mu$. □

4. Mengenweise Konvergenz von Massen

Wir betrachten eine Folge von Maßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Messraum (Ω, Σ). Zu zeigen ist, dass der mengenweise Grenzwert ein Maß ist, unter der Voraussetzung, dass dieser existiert und endlich ist. Wir beginnen mit zwei Lemmata, die dies unter anderen Voraussetzungen erfüllen.

Lemma 4.1. *Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf einem Messraum (Ω, Σ) und $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A \in \Sigma$. Dann definiert*

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

ein Maß auf (Ω, Σ).

Beweis. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in Σ. Wegen $\mu_n(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \Sigma$ gilt

$$\mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Aus $\mu_n(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) \leq \mu_n(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu_n(A_j) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) \leq \mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j). \quad \square$$

Aus Lemma 4.1 folgt sofort

Lemma 4.2. *Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf einem Messraum (Ω, Σ). Dann definiert*

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$$

ein Maß auf (Ω, Σ).

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir den

Satz von Vitali-Hahn-Saks 4.3. *Sei* (Ω, Σ) *ein Messraum und* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Maßen auf* (Ω, Σ)*, so dass für alle* $A \in \Sigma$ *der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ *existiert und endlich ist. Dann definiert*

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

ein Maß auf (Ω, Σ)*.*

Beweis. Nach Lemma 4.2 ist

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1 + \mu_n(\Omega))} \mu_n$$

ein Maß auf (Ω, Σ). Dieses ist endlich, denn $\nu(\Omega) \leq 2$. Es ist klar, dass μ_n absolut stetig bezüglich ν für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Aus dem Satz von Radon-Nikodym folgt die Existenz ν-integrierbarer Funktionen f_n, so dass $\mu_n = f_n \cdot \nu$ gilt. Nun gilt für $A \in \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

und daher existiert dieser Grenzwert und ist endlich. Nach Satz 3.6 existiert eine ν-integrierbare Funktion f, so dass für alle $A \in \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \int_A f \, d\nu$$

gilt. Also ist $\mu = f \cdot \nu$, was ein Maß auf (Ω, Σ) ist. $\square$