Der Satz von Vitali-Hahn-Saks

Sei (Ω, Σ) ein Messraum und (μ_n) eine Folge von Maßen auf (Ω, Σ), so dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ für alle $A \in \Sigma$ existiert und endlich ist.

Ist $\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ ein Maß?

Es gilt für $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$:

(1) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall\, A \in \Sigma$
(2) $\mu(\emptyset) = 0$
(3) μ ist endlich additiv, denn für $k \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(A_n) \subset \Sigma$ disjunkter Mengen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu_n(A_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_j)$$

Ist $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$ σ-additiv?

Zuerst betrachte

$$\mu_n(A)=\int_A f_n \, d\nu \quad \text{wobei } f_n\in L^1(\Omega,\Sigma,\nu), \quad \nu \text{ endlich}$$

Dann gilt

(1) μ_n σ-additiv $\left(g_k(x)=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{A(j)}(x)f_n(x), \text{Satz von Lebesgue}\right)$

(2) μ_n endlich $\left(f_n\in L^1(\Omega,\Sigma,\nu)\right)$

(3) $\mu_n \ll \nu$

Lemma: μ σ-additiv, endlich; ν endliches Maß. Dann

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0: \; (\nu(A) < \delta \Rightarrow |\mu(A)| < \varepsilon)$$

Also für $\mu_n(A) = \int_A f_n \, d\nu$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall n \, \exists \delta > 0: \; (\nu(A) < \delta \Rightarrow |\mu_n(A)| < \varepsilon)$$

Gilt dies auch gleichmäßig, d.h. gilt sogar

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall n: \; (\nu(A) < \delta \Rightarrow |\mu_n(A)| < \varepsilon) \; ?$$

Falls dies gleichmäßig gilt, d.h. falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall n: \ (\nu(A) < \delta \Rightarrow |\mu_n(A)| < \varepsilon),$$

so zeigt man $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\nu$ ist σ-additiv

($\Leftrightarrow \mu$ stetig in $\emptyset$):

Sei $(A_j) \subset \Sigma$ monoton fallende Folge, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$.

$\exists \delta > 0 \,\forall n: \ (\nu(A) < \delta \Rightarrow |\mu_n(A)| < \varepsilon)$

$\exists N \,\forall j \geq N: \ \nu(A_j) < \delta$

$\Rightarrow |\mu(A_j)| < \varepsilon \quad \forall j \geq N \quad \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0$

Zusammengefasst:

(μ_n) Folge von Maßen auf (Ω, Σ),

$\mu(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A)$ existent, endlich $\forall A \in \Sigma$

Ist μ ein Maß? Problem: σ-Additivität

Falls $\mu_n(A) = \int\limits_A f_n \, d\nu$, gilt σ-Additivität für μ

unter der Voraussetzung, dass $\mu_n \ll \nu$ glm. in n, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall n: \; (\nu(A) < \delta \Rightarrow |\mu_n(A)| < \varepsilon)$$

Ziel: Zeige $\mu_n \ll \nu$ glm. in n

Dazu: Satz von Baire & Metrik auf Σ

Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum.

Betrachte $d(A, B) := \mu(A \Delta B)$ für $A, B \in \Sigma$

Es gilt

(1) $A \Delta B = B \Delta A \Rightarrow \mu(A \Delta B) = \mu(B \Delta A)$ (Symmetrie)

(2) $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$

$\Rightarrow \mu(A \Delta C) \leq \mu(A \Delta B) + \mu(B \Delta C)$

(Dreiecksungleichung)

Gilt auch Definitheit?

Gegenbeispiel: δ_1 Diracmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\delta_1([0,1] \Delta [1,2]) = 0$ aber $[0,1] \neq [1,2]$

Einführen einer Äquivalenzrelation, um Definitheit zu erhalten:

$$A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \,\Delta\, B) = 0$$

Damit gilt die Definitheit auf der Menge Σ / μ der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$.

$\Rightarrow \Sigma / \mu$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik

$$d(A, B) = \mu(A \,\Delta\, B).$$

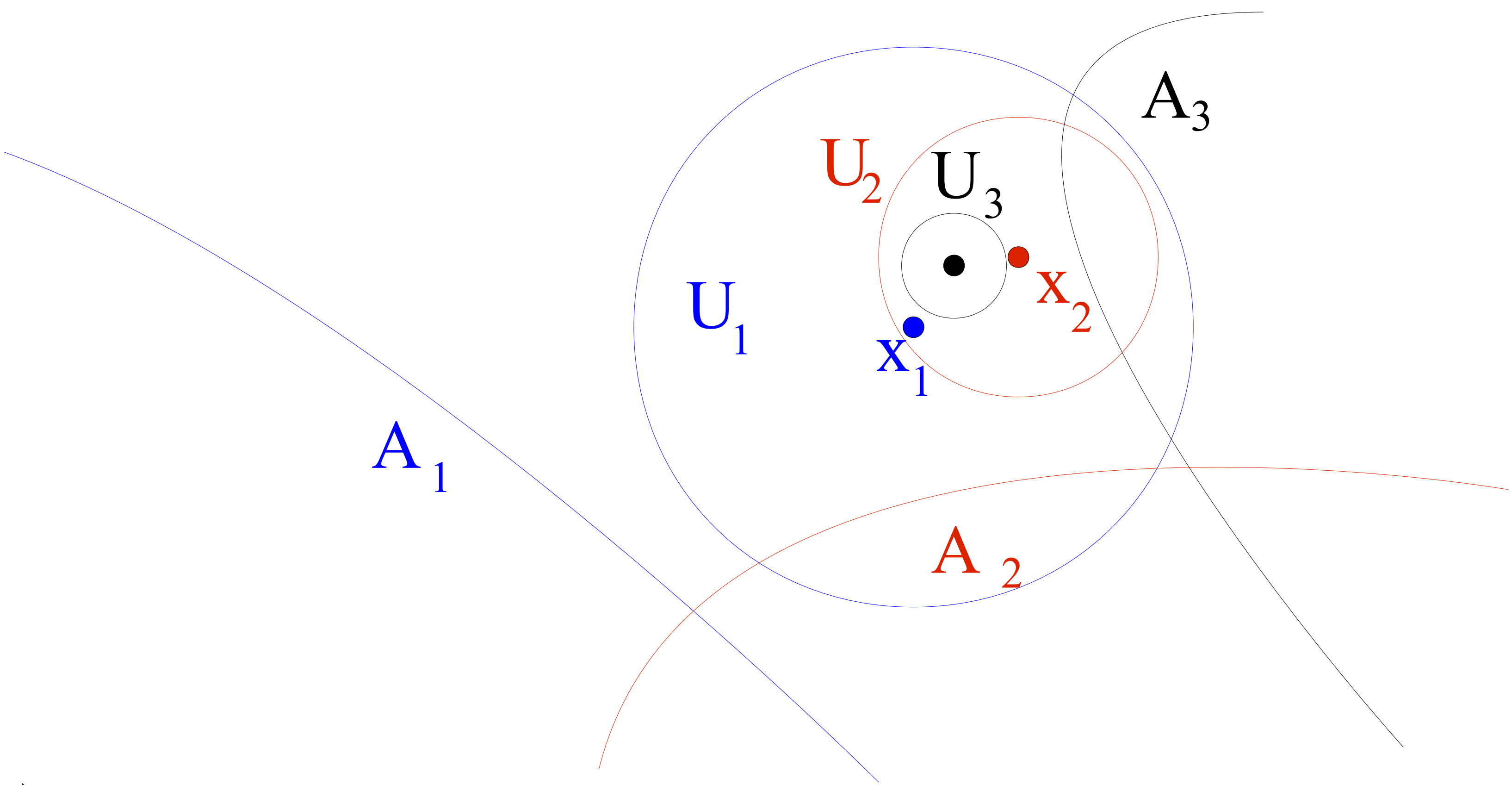
Man zeigt außerdem: $(\Sigma / \mu, d)$ ist vollständig

Satz von Baire

Ω vollständiger metrischer Raum, $A_n \subset \Omega$ abgeschlossen,

$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann $\exists m: \quad \mathring{A}_m \neq \emptyset$

Beweisskizze: Angenommen $\mathring{A}_n = \emptyset \quad \forall n$



$\Rightarrow (x_n)$ Cauchyfolge $\Rightarrow \exists x: \quad x_n \to x$, aber $x \notin A_n \quad \forall n$, Widerspruch

Wiederholung:

$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ existent, endlich $\forall A \in \Sigma$

Falls $\mu_n(A) = \int_A f_n \, d\nu$, gilt σ-Additivität für μ

unter der Voraussetzung, dass $\mu_n \ll \nu$ glm. in n, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall n: \; (\nu(A) < \delta \Rightarrow |\mu_n(A)| < \varepsilon)$$

Nun können wir zeigen $\mu_n \ll \nu$ glm. in n

Satz: $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\nu$ endlich $\forall A\in\Sigma$. Dann

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall n:\ \left(\nu(A)<\delta\Rightarrow\left|\int_A f_n\,d\nu\right|<\varepsilon\right)$$

Beweisskizze:

$\varepsilon>0$, $M_{km}=\left\{A\in\Sigma/\nu:\left|\int_A f_k-f_m\ d\nu\right|\le\varepsilon\right\}$ abgeschlossen in Σ/ν

$\Rightarrow M_n=\bigcap_{k,m\ge n} M_{km}$ abgeschlossen

Voraussetzung $\Rightarrow \Sigma/\mu=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$

Baire $\Rightarrow \exists n,B,r>0\ \forall k,m\ge n:\ \left|\int_A f_k-f_m\ d\nu\right|\le\varepsilon$ falls $\nu(A\Delta B)<r$

$\Rightarrow$

$\exists\delta\in(0,r):\ \left|\int_A f_j\,d\nu\right|\le\varepsilon\quad\forall j=1,\dots,n$ falls $\nu(A)<\delta$

$j>n:\ \int_A f_j\,d\nu=\int_A f_n\,d\nu+\int_{A\cup B} f_j-f_n\ d\nu-\int_{B\setminus A} f_j-f_n\ d\nu\le 3\varepsilon$

falls $\nu(A)<\delta$

Korollar:

(Ω, Σ, ν) endlicher Maßraum, $(f_n) \subset L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\nu$ endlich $\forall n$

Dann $\exists f \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$: $\int_A f_n \, d\nu \to \int_A f \, d\nu \quad \forall A \in \Sigma$

Satz von Vitali-Hahn-Saks

(Ω, Σ) Messraum, (μ_n) Folge von Maßen, $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ existiert und endlich $\forall A \in \Sigma$. Dann $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ ein Maß auf (Ω, Σ).

Beweisskizze:

$$\nu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n \text{ mit } c_n = 2^{-n}\left(1+\mu(\Omega)\right)^{-1} \Rightarrow \mu_n \ll \nu$$

$$\text{Radon-Nikodym} \Rightarrow \mu_n = f_n \cdot \nu$$

$$\Rightarrow \exists f \in L^1(\nu): \quad \mu_n(A) \to \int_A f \, d\nu \quad \Rightarrow \mu = f \cdot \nu \text{ Maß}$$

Noch unklar: Warum ist ν ein Maß?

Lemma: $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A) \quad \forall n \forall A \in \Sigma$

Dann $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(A)$ ein Maß auf (Ω, Σ).

Beweisskizze: (A_n) Folge disjunkter Mengen

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \mu_n(A_j) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Korollar: $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$ ist Maß auf (Ω, Σ).