EXISTENZ EINES ENDLICH ADDITIVEN INHALTS

SASCHA FREDERIK GRITZBACH

1. Einleitung

Die Einführung des Lebesguemaßes auf der Borelschen σ-Algebra genügt der intuitiven Vorstellung, dass der „Inhalt“, oder besser: das Maß, eines Intervalls gerade dessen Länge entspricht. Die Idee, das Lebesguemaß unter Beibehaltung seiner Eigenschaften auf die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ zu erweitern, ist naheliegend. Allerdings geht dabei die σ-Additivität verloren, denn es lässt sich zeigen, dass dann eine messbare Menge mit nicht eindeutigem Maß existiert.
In der vorliegenden Arbeit wird die Existenz einer solchen Fortsetzung in drei Schritten gezeigt. Im ersten Teil werden einige Erkenntnisse aus der Funktionalanalysis, im Besonderen der Satz von Hahn-Banach, zusammengetragen, die zum Beweis der obigen Aussage benötigt werden. Im Anschluss formuliere ich einen allgemein gehaltenen Satz über die Existenz eines linearen Funktionals auf der Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen mit Periode 1, das für Lebesgue-messbare Funktionen mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt. Durch Betrachtung von Indikatorfunktionen folgern wir im dritten Teil dann die Existenz eines Inhalts auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}$. Schließlich wird anhand von Beispielen aufgezeigt, warum die Einschränkung auf die reelle Zahlengerade und die Endlichkeit der Additivität notwendig sind.

2. Der Satz von Hahn-Banach

In diesem Kapitel werden wir einige Begriffe aus der Funktionalanalysis erklären, die für den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach benötigt werden.

Definition 2.1. Es sei V ein Vektorraum. Gelten für eine Abbildung $p\colon V \to \mathbb{R}$ die Aussagen

a) $p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x)$ für beliebige $\lambda \geq 0$, $x \in V$ und
b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für beliebige x, $y \in V$,

so heißt p *sublinear*.

Beispiel 2.2. Wir betrachten den $\mathbb{R}^d$ als Vektorraum. Jede Norm $\|\,.\,\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist eine sublineare Abbildung.

Eine Verallgemeinerung von 2.1 liefert den in der Funktionalanalysis zentralen Begriff des linearen Operators.

Definition 2.3. Es seien E und F normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ heißt *linearer Operator*. Ist F der Skalarkörper $\mathbb{K}$, so nennt man T ein *lineares Funktional*.

Beispiel 2.4. Die Abbildung p: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die einen Vektor in die x_1x_2-Ebene projeziert, ist ein linearer Operator. Exemplarisch für ein lineares Funktional sei das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^d$ mit einer festen Komponenten $y \in \mathbb{R}^d$ erwähnt.

Damit sind alle Begriffe erklärt, die zur Formulierung des Satzes von Hahn-Banach benötigt werden.

Satz 2.5 (Hahn-Banach)**.** *Es seien V ein reeller Vektorraum und U ein Unterraum von V. Weiter seien $p\colon V \to \mathbb{R}$ sublinear und $l\colon U \to \mathbb{R}$ linear, sodass*

$$l\,(x) \le p\,(x) \qquad \forall x \in U.$$

Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $L\colon V \to \mathbb{R}$, $L_{|U} = l$, sodass

$$L\,(x) \le p\,(x) \qquad \forall x \in V.$$

Beweis. Den Beweis des Satzes von Hahn-Banach gliedern wir in zwei Teile. Zuerst wird gezeigt, wie sich eine Erweiterung finden lässt, wenn V genau eine Dimension mehr hat als U. Im zweiten Teil betrachten wir die Menge aller Erweiterungen auf Unterräume W mit $U \subset W \subset V$, die die Eigenschaften des Satzes von Hahn-Banach erfüllen und zeigen durch Verwenden des *Zornschen Lemmas*, dass in dieser Menge auch eine Erweiterung auf den gesamten Raum V existiert.
Es wird also nun gezeigt, dass eine Erweiterung von U nach V existiert, falls V genau eine Dimension mehr hat als U. Nach Voraussetzung gibt es ein $v_0 \in V \setminus U$. Dann lässt sich jedes Element $v \in V$ eindeutig darstellen als

$$v = u + \lambda v_0 \qquad (u \in U, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ liefert

$$L_r(x) := l(u) + \lambda r \qquad (x \in V)$$

eine lineare Abbildung, die eine Fortsetzung von l darstellt, denn für $x \in U$ gilt schon $\lambda = 0$.
Durch eine spezielle Wahl von r, die im Folgenden gezeigt wird, lässt sich die Majorisierung von L_r durch p sicherstellen. Dabei ist $L_r \le p$ äquivalent zu

$$l(u) + \lambda r \le p\,(u + \lambda v_0) \qquad \forall\, u \in U, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Bereits nach Voraussetzung gilt die Ungleichung (2.1) für alle $u \in U$, wenn $\lambda = 0$ ist. Sei also $\lambda > 0$. Es gilt (2.1) genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \lambda r \le p\,(u + \lambda v_0) - l(u) \qquad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow \qquad & r \le p\left(\frac{u}{\lambda} + v_0\right) - l(\frac{u}{\lambda}) \qquad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow \qquad & r \le \inf_{x \in U} (p\,(x + v_0) - l(x)). \end{aligned}$$

Für den Fall, dass λ negativ ist, gilt analog

$$\begin{aligned} & \lambda r \le p\,(u + \lambda v_0) - l(u) \qquad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow \qquad & -r \le p\left(\frac{u}{-\lambda} - v_0\right) - l\left(\frac{u}{-\lambda}\right) \qquad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow \qquad & r \ge \sup_{y \in U} (l(y) - p\,(y - v_0)). \end{aligned}$$

Die Existenz eines $r \in \mathbb{R}$, sodass (2.1) gilt, ist also genau dann bewiesen, wenn

$$l(y) - p\,(y - v_0) \le p\,(x + v_0) - l(x) \qquad \forall\, x, y \in U$$

gilt. Dies folgt aber unmittelbar aus der Sublinearität von p, denn es gilt für beliebige $x, y \in U$:

$$l(x) + l(y) = l(x+y) \leq p\,(x+y) \leq p\,(x+v_0) + p\,(y - v_0)$$

Wir haben also gezeigt, dass sich eine lineare Fortsetzung von U auf V finden lässt, wenn U genau eine Dimension weniger hat als V. Betrachten wir die Menge aller Erweiterungen auf Unterräume W mit $U \subset W \subset V$:

$$A := \left\{ (W, L_W) : \begin{array}{l} W \text{ Unterraum von } V \text{ mit } U \subset W \\ L_W \colon W \to \mathbb{R} \text{ linear mit } L_W \leq p_{|W}, L_{W|U} = l \end{array} \right\},$$

auf der folgende Ordnung definiert wird:

$$(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2}) :\Leftrightarrow V_1 \subset V_2, L_{V_2|V_1} = L_{V_1}.$$

Wir verwenden das *Lemma von Zorn*, das nach [Wer07, S. 95] lautet:

> *Sei $(A, \leq)$ eine teilweise geordnete nichtleere Menge, in der jede Kette (das ist eine total geordnete Teilmenge, also eine Teilmenge, für deren Elemente stets $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt) eine obere Schranke besitzt. Dann liegt jedes Element von A unter einem maximalen Element von A, also einem Element m mit $m \leq a \Rightarrow a = m$.*

Gemäß der Definition von $\leq$ ist $(A, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge. Insbesondere ist $A \neq \emptyset$, weil $(U, l) \in A$. Für eine beliebige totalgeordnete Teilmenge $B := \{(V_i, L_{V_i}) \ : \ i \in I\} \subset A$ mit einer beliebigen Indexmenge I findet sich eine obere Schranke (V, L_V), indem man setzt

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \qquad L_V(x) = L_{V_i}(x) \text{ für } x \in V_i (i \in I).$$

Dieses L_V ist wohldefiniert, weil B eine totalgeordnete Menge ist.
Damit sind die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt, wodurch ein Maximum $m = (V_0, L_{V_0})$ existiert. Dann ist bereits $V_0 = V$, denn andernfalls ließe sich nach dem ersten Teil des Beweises eine echte Majorante zu m finden, was im Widerspruch zur Maximalität von m stünde. Wählt man $L := L_{V_0}$, so ist die gesuchte Fortsetzung gefunden und der Satz von Hahn-Banach bewiesen. $\square$

Damit sind alle Grundlagen gelegt, um den Hauptsatz dieser Arbeit zu beweisen, was im nächsten Kapitel geschehen wird.

3. Existenzsatz

Treffen wir zuerst noch einige Definitionen aus der Maßtheorie.

Definition 3.1. Es sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge $R \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Ring*, wenn $\emptyset \in R$ und wenn für beliebige Mengen $A, B \in R$ auch $A \cup B$ und $A \setminus B \in R$ gilt.

Es sei angemerkt, dass der Begriff des „Ringes“ schwächer ist als der Begriff der „Algebra“. Für letztere wird zusätzlich gefordert, dass der Gesamtraum Ω enthalten ist, was dann bereits die Abgeschlossenheit bezüglich der Komplementbildung liefert.
Ein Inhalt lässt sich bereits auf einem Ring definieren.

Definition 3.2. Es sei für eine Menge Ω ein Ring $R \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gegeben. Eine monotone Abbildung $\nu \colon R \to \mathbb{R}$ mit $\nu(\emptyset) = 0$ und $\nu(E + F) = \nu(E) + \nu(F)$ für beliebige disjunkte Mengen $E, F \in R$ gilt, heißt *Inhalt.*

Als letzte Definition vor dem angesprochenen Existenzsatz sei noch der bereits in der Einleitung verwendete Begriff der „Lebesgue-Messbarkeit“ erklärt. Bekannterweise sind Nullmengen dadurch definiert, dass eine messbare Obermenge mit Maß 0 existiert. Dies führt dazu, dass Nullmengen nicht messbar sein müssen.

Definition 3.3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$ der dazugehörige Maßraum mit dem Lebesguemaß. Weiter sei $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega : N \text{ Nullmenge}\}$ die Menge aller Nullmengen.
Die *Lebesgue σ-Algebra* ist die von $\mathcal{B}(\Omega) \cup \mathcal{N}$ erzeugte σ-Algebra.
Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heiß *Lebesgue-messbar*, wenn sie bezüglich der Lebesgue σ-Algebra messbar ist.

Bemerkung 3.4. Eine hervorzuhebende Eigenschaft der Lebesgue σ-Algebra ist die Vollständigkeit. Das bedeutet, dass jede Nullmenge messbar ist.

Durch den Beweis des folgendes Satzes, wie er in [Zaa67, Sec. 28] zu finden ist, lässt sich unmittelbar die Kernaussage dieser Arbeit ableiten:

Satz 3.5. *Auf dem Raum V der beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode* 1 *existiert ein nichtnegatives lineares Funktional $\mathcal{L}$, sodass gilt:*

i) *$\mathcal{L}$ stimmt für jede Lebesgue-messbare Funktion mit dem Lebesgue-Integral auf $(0, 1]$ überein.*
ii) $\mathcal{L}(f(x + x_0)) = \mathcal{L}(f(x))$ *für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$*
iii) $\mathcal{L}(f(1 - x)) = \mathcal{L}(f(x))$.

Beweis. Zu Beginn des Beweises definieren wir uns ein sublineares Funktional auf V, das das Lebesgue-Integral aller messbaren Funktionen entlang $(0, 1]$ majorisiert. Im Anschluss liefert der Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung des Lebesgue-Integrals auf alle Funktionen in V, woraus die gesuchte lineare Abbildung konstruiert wird.
Für jedes $f \in V$ definiere

$$M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i),$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine endliche Folge reeller Zahlen ist. Weiter bezeichne p das Infimum der $M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ über alle diese Folgen $(\alpha_i)_{i=1}^n$, wobei insbesondere auch die Anzahl der Folgenglieder n nicht fest ist.
Im Folgenden wird gezeigt, dass p ein sublineares Funktional auf V ist.
Die Homogenität mit einer beliebigen Konstante $\lambda \geq 0$ ist klar aufgrund der Definition von p. Der Beweis der Subadditivität ist aufwändiger. Seien dazu $f, g \in V$, $\varepsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums existieren endliche Folgen $(\alpha_i)_{i=1}^p, (\beta_i)_{i=1}^q \subset \mathbb{R}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, sodass

$$M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_p) < p(f) + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad M(g; \beta_1, \ldots, \beta_q) < p(g) + \varepsilon.$$

Durch Addieren je zweier Glieder der Folgen $(\alpha_i)_{i=1}^p, (\beta_i)_{i=1}^q$ ergibt sich eine Folge $(\gamma_i)_{i=1}^{pq} \subset \mathbb{R}$, d.h. für jedes $k \in \{1, \ldots, pq\}$ ist $\gamma_k = \alpha_i + \beta_j$ für ein $i \in 1, \ldots, p$ und ein $j \in 1, \dots, q$. Mit dieser Folge ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
p(f+g) &\le M(f+g; \gamma_1, \dots, \gamma_{pq}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{pq} \cdot \sum_{i=1}^{pq} (f+g)(x+\gamma_i) \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{pq} \cdot \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (f+g)(x+\alpha_i+\beta_j) \\
&\le \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} f(x+\alpha_i+\beta_j)}_{\le M(f;\alpha_1,\dots,\alpha_p)} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} g(x+\alpha_i+\beta_j) \\
&\le M(f;\alpha_1,\dots,\alpha_p) + M(g;\beta_1,\dots,\beta_q) < p(f) + p(g) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei die strenge Ungleichung aus der Wahl der Folgen $(\alpha_i)_{i=1}^p, (\beta_i)_{i=1}^q$ folgt. Da obige Aussage für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die behauptete Subadditivität.
Damit ist gezeigt, dass $p\colon V \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf V ist.
Im Folgenden betrachten wir den Unterraum V_1 aller Lebesgue-messbaren Funktionen in V.
Die Abbildung $\phi\colon V_1 \to \mathbb{R}$, $\phi(f) := \int_{(0,1]} f d\lambda$ ist linear, weil das Integral linear ist. Um die Voraussetzungen des Satzes von Hahn-Banach zu erfüllen, zeigen wir nun noch, dass p eine Majorante von ϕ auf V_1 ist. Nach Voraussetzung ist $f \in V_1$ periodisch, wodurch unmittelbar die Gültigkeit von

$$\int_{(0,1]} f(x) d\lambda = \int_{(0,1]} f(x+\alpha) d\lambda$$

für jedes reelle α folgt. Wegen der Linearität des Integrals folgt dann auch für beliebige $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, dass

$$\phi(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{(0,1]} f(x+\alpha_i) = \int_{(0,1]} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)}_{M(f;\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \le M(f;\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

Aufgrund der Beliebigkeit von $(\alpha_i)_{i=1}^n$ bleibt diese Ungleichung auf für das Infimum über alle diese Folgen gültig, d.h. es gilt

$$\phi(f) \le \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}}} M(f;\alpha_1,\dots,\alpha_n) = p(f),$$

was in diesem Teil des Beweises zu zeigen war. Wir haben also eine Majorante für ϕ gefunden, wodurch der Satz von Hahn-Banach über die Fortsetzung eines linearen Funktionals von einem Unterraum auf den Gesamtraum anwendbar ist.
Es sei $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ die Fortsetzung von ϕ auf V. Nach Hahn-Banach gilt also $\Phi_{|V_1} = \phi$ und $\Phi \le p$. Mithilfe dieses Φ definiere $\mathcal{L}$ durch

$$\mathcal{L}(f) := \frac{1}{2}(\Phi(f(x)) + \Phi(f(1-x))).$$

Es wird nun gezeigt, dass $\mathcal{L}$ die Eigenschaften dieses zu beweisenden Satzes erfüllt. Dabei werden die Nichtnegativität und die Translationsinvarianz für Φ gezeigt. Diese Eigenschaften folgen dann unmittelbar für $\mathcal{L}$ aufgrund dessen Definition.

i) Aufgrund der Symmetrie in der Definition von $\mathcal{L}$ gilt bereits, dass $\mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}(f(1-x))$.

ii) Wegen der Tatsache, dass für jedes $f \in V_1$

$$\Phi(f(x)) = \int_{(0,1]} f(x) d\lambda = \int_{(0,1]} f(1-x) d\lambda = \Phi(f(1-x))$$

gilt, folgt auch, dass $\mathcal{L}(f)$ für jede Funktion $f \in V_1$ mit dem Lebesgue-Integral entlang $(0,1]$ übereinstimmt.

iii) Es werde nun die Translationsinvarianz gezeigt für Φ. Zu beliebigen $x_0 \in \mathbb{R}$ definiere $g(x) := f(x+x_0) - f(x)$ und für $n \in \mathbb{N}$ wähle $\alpha_i = (i-1)x_0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann folgt durch ein Teleskopsummenargument, dass

$$p\,(g) \leq M(g; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x + nx_0) + f(x)$$

und damit aufgrund der Beschränktheit von f, dass $p\,(g) \leq 0$ ist, weil sich $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß wählen lässt. Ebenso folgt $p\,(-g) \leq 0$. Wegen der Majorisierung von Φ durch p folgt unmittelbar $\Phi(g) = -\Phi(-g) \geq -p\,(-g) \geq 0$ und damit $\Phi(g) = 0$. Die damit gezeigte Translationsinvarianz überträgt sich auf $\mathcal{L}$.

iv) Es bleibt noch die Nichtnegativität zu zeigen, d.h. dass $\Phi(f) \geq 0$ für $f \geq 0$. Gilt $f \leq 0$, so ist $p\,(f) \leq 0$, also wegen der Majorisierung auch $\Phi \leq 0$. Aufgrund der Linearität von Φ und p folgt dann $\Phi(f) \geq 0$ für jede nichtnegative Funktion $f \in V$. Insbesondere ist dann $\mathcal{L}$ als Linearkombination nichtnegativer Funktionale selbst nichtnegativ, was zu zeigen war.

Damit sind alle behaupteten Eigenschaften der durch den Satz von Hahn-Banach gewonnenen Fortsetzung des Lebesgue-Integrals gezeigt und der Beweis beendet. □

Obiger Satz wird nun im folgenden Korollar spezialisiert, welches die Aussage liefert, die Thema dieser Arbeit ist.

Korollar 3.6. *Auf der Potenzmenge von* $(0,1]$ *gibt es eine nichtnegative Funktion* ν *mit folgenden Eigenschaften:*

i) $\nu(E+F) = \nu(E) + \nu(F)$ *für beliebige disjunkte Mengen* E *und* $F \in \mathcal{P}((0,1])$.
ii) ν *stimmt für Lebesgue-messbare Funktionen mit dem Lebesgue-Maß überein.*
iii) ν *ist translationsinvariant.*
iv) ν *ist invariant bei Spiegelungen an der Stelle* $x = \frac{1}{2}$.

Bemerkung 3.7. Es mag zunächst unklar erscheinen, wie der dritte Punkt zu verstehen ist, denn durch Translation ist es möglich, dass eine Menge aus dem Definitionsbereich von ν „herausrutscht". Wir wollen hier die Translation als zyklische Translation auffassen.

Beweis. Betrachtet man als Funktionen f_E die periodisch fortgesetzten Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_E$ für beliebige Teilmengen $E \subset (0,1]$, so erfüllt

$$\nu(E) := \mathcal{L}(f_E) \quad (E \subset (0,1]$$

die Eigenschaften, die in diesem Korollar an ν gestellt werden. Die endliche Additivität folgt dabei aus der Tatsache, dass für disjunkte Mengen $E, F \subset (0,1]$ die Gleichung $\mathbb{1}_{E \cup F} = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F$ gilt und aus der Linearität von $\mathcal{L}$. □

Die Konstruktion eines Maßes mit obigen Eigenschaften auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ erfolgt durch Addition von Maßen ν:

$$\mu(A) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu((A \cap (k, k+1]) - k) \qquad \forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Damit ist auch die Unklarheit bezüglich der zyklischen Translation beseitigt.

Bemerkung 3.8. Wie bereits eingangs erwähnt, sind zum Beweis der Existenz eines solchen endlich-additiven Maßes einige Einschränkungen notwendig gewesen.
Eine denkbare Verallgemeinerung ist es, die Aussage für $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ mit $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zu zeigen. Während der Beweis für $d = 2$ noch möglich ist, zeigt das berühmte *Banach-Tarski-Paradoxon* die Unmöglichkeit für $d \geq 3$.
Die Forderung nach der σ-Additivität führt zu einem Widerspruch: Die *Vitali-Menge* ist eine nicht Lebesgue-messbare Menge. Im Beweis der Nicht-Messbarkeit wird ein Widerspruch mithilfe der σ-Additivität gezeigt. Wäre obige auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definierte Funktion μ σ-additiv, so hätte die Vitali-Menge kein eindeutig definiertes Maß bezüglich μ.

Literatur

[Wer07] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer Verlag, 2007.
[Zaa67] A. C. Zaanen, *Integration*, North-Holland Publishing Co., 1967.