Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 1

1. Es seien $c > 0$, $u_0 \in C^2[a,b]$ und $u_1 \in C^1[a,b]$, sodass

$$u_0(a) = u_0''(a) = u_0(b) = u_0''(b) = u_1(a) = u_1(b) = 0.$$

Zeige, dass eine Funktion $u \in C^2([0,\infty) \times [a,b])$, existiert, die folgendes Anfangs-Randwertproblem löst:

$$\text{(ARWP)} \quad \begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & t > 0,\ x \in (a,b) \\ u(t,a) = u(t,b) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x) & x \in (a,b) \end{cases}$$

Hinweis: Setze die Funktionen u_0 und u_1 ungerade auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

2. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeige, dass $v \in C^2((0,\infty) \times \mathbb{R})$ und

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v_{rr}(r,\varphi) + \frac{v_r(r,\varphi)}{r} + \frac{v_{\varphi\varphi}(r,\varphi)}{r^2}$$

für alle $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.

3. In dieser Aufgabe wollen wir mit Hilfe der sog. *Trennung der Variablen* die Lösungsformel der Laplacegleichung auf der Kreisscheibe herleiten.

Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2((0,1) \times \mathbb{R})$ mit $u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 0$ für alle $r \in (0,1)$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.

Wir nehmen an, dass eine solche Lösung existiert und von der Form $u(r,\varphi) = v(r) \cdot w(\varphi)$ ist mit geeigneten Funktionen $v \in C^2((0,1))$ und $w \in C^2(\mathbb{R})$, wobei $w(\varphi) = w(2\pi + \varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

(a) Folgere die Identität

$$r^2 \frac{v''(r)}{v(r)} + r\frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} \quad (r \in (0,1),\ \varphi \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

unter der Annahme, dass v und w keine Nullstellen besitzen. Da die Variablen nun getrennt sind, muss es sich bei beiden Seiten der Gleichung (1) um eine Konstante handeln, die wir mit λ bezeichnen.

(b) Wir erhalten die Bedingung $w'' = -\lambda w$ an die Funktion w. Folgere, dass $\lambda \geq 0$.

(c) Die allgemeine Lösung der Gleichung $w'' = -\lambda w$ lautet nun

$$w(\varphi) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Folgere, dass $\lambda = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Formuliere, analog zu Augabenteil (b), eine Gleichung für v und rate eine nicht-triviale Lösung (in Abhängigkeit von n).

(e) Gib für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine nicht-triviale Lösung u der Laplacegleichung an.

4. Es sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$. Wir suchen eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ der folgenden *Transportgleichung* auf $\mathbb{R}$.

$$\text{(T)} \qquad \begin{cases} u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(t,x) + cu_x(t,x) = 0 & t,x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Sei u eine Lösung von (T) und definiere

$$v(\tau,\xi) := u(\tau, \xi + c\tau) \quad (\tau, \xi \in \mathbb{R}).$$

Zeige, dass der Wert der Funktion v nicht von τ abhängt.

(b) Folgere, dass $u(t,x) := u_0(x - ct)$ die eindeutige Lösung von (T) ist.