Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 10.05.12

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 3

7. Parabolisches Maximumprinzip mit Neumann-Randbedingungen
Es sei $\Omega := (a,b)$ und $\tau > 0$. Wir diskutieren eine Funktion $u \in C^{1,2}((0,\tau) \times [a,b])$ mit $u_t \leq u_{xx}$ auf $(0,\tau) \times [a,b]$ und $u_x(t,a) = u_x(t,b) = 0$ für alle $t \in (0,\tau)$.

(a) Es sei $t \in (0,\tau)$. Zeige, dass $u_{xx}(t,a) \leq 0$ falls $u(t,a) = \max_{x\in[a,b]} u(t,x)$ und dass $u_{xx}(t,b) \leq 0$ falls $u(t,b) = \max_{x\in[a,b]} u(t,x)$.

(b) Zeige, dass $u(t,x) \leq \max_{z\in[a,b]} u(0,z)$ für alle $(t,x) \in [0,\tau] \times [a,b]$.

(c) Zeige, dass es für alle $u_0 \in C([a,b])$ höchstens ein $u \in C^{1,2}((0,\tau) \times [a,b])$ gibt, mit $u_t = u_{xx}$ auf $(0,\tau) \times [a,b]$, $u_x(t,a) = u_x(t,b) = 0$ für alle $t \in (0,\tau)$ und $u(0,\cdot) = u_0$. Zeige weiter: Ist $u_0 \geq 0$, so ist auch $u \geq 0$.

8. Wir betrachten die **Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen**

$$\text{(WLG)} \quad \begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & t > 0,\ x \in (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

für Anfangswerte u_0 aus dem Vektorraum $C_0([0,\pi]) := \{f \in C([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$, der im Folgenden stets mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$ versehen sei.

(a) Für $t \geq 0$ definieren wir die Abbildung $T(t) : C_0([0,\pi]) \to C_0([0,\pi])$ durch

$$T(t)f := u(t,\cdot),$$

wobei u die eindeutige Lösung von (WLG) mit Anfangswert $u_0 = f$ bezeichne. Zeige, dass $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine Familie kontraktiver linearer Operatoren ist, die dem *Halbgruppengesetz*

$$T(0) = I \quad \text{und} \quad T(t)T(s) = T(t+s) \quad (t,s \geq 0)$$

genügt.

(b) Zeige, dass es Konstanten $M, \omega > 0$ gibt, sodass

$$\|T(t)f\| \leq Me^{-\omega t}\|f\|$$

für alle $f \in C([0,\pi])$ und $t \geq 0$.

Hinweis: Schätze den Ausdruck $e^{\omega t}(T(t)f)(x)$ mithilfe der Lösungsformel ab.

9. Beweise die nachstehenden Eigenschaften des **Gaußkerns**

$$g(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \quad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

(a) $g \in C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R})$ mit $g_t = g_{xx}$.

(b) $\int_{\mathbb{R}} g(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$ für alle $t > 0$.