Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 24.05.12

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 4

10. Asymptotik der Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Es sei $u_0 \in C_0(\mathbb{R})$ und $u \in C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R})$ die eindeutige Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$

$$\text{(WLG)} \quad \begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & t > 0,\, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $C_0(\mathbb{R}) = \overline{C_c(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty}$.

(b) Zeige, dass $\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_\infty = 0$. Gilt dies auch für $u_0 \in C(\mathbb{R})$?

(c) Es sei $u_0 \geq 0$. Zeige, dass $\|u(t,\cdot)\|_1 = \|u_0\|_1$ für alle $t \geq 0$.

11. Beispiele

(a) Bestimme die schwache Ableitung der Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ liegt die Funktion $f(x) := x^\alpha$ in $H^1(0,1)$?

(c) Betrachte die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 \sin(1/x^2)$. Zeige, dass f in $C([0,1])$ liegt und in jedem Punkt aus $[0,1]$ differenzierbar ist, jedoch nicht in $H^1(0,1)$ liegt.

12. Zusammensetzung

Es sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Partition des Intervalls $[a,b]$. Für $k = 1,\dots,n$ sei $f_k \in H^1(t_{k-1},t_k)$ gegeben, mit der Eigenschaft, dass $f_k(t_k) = f_{k+1}(t_k)$ für $k = 1,\dots,n-1$.

Zeige, dass $f(x) := f_k(x)$, $x \in [t_{k-1},t_k]$, eine Funktion in $H^1(a,b)$ definiert.

13. Vollständigkeit

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum. Ferner sei $\Phi : X \to Y$ eine lineare, injektive und stetige Abbilung, sodass $\Phi^{-1} : \Phi(X) \to X$ ebenfalls stetig ist.

Zeige, dass X genau dann ein Banachraum ist, wenn $\Phi(X)$ in Y abeschlossen ist.

14. Konvergenz in H^1

Es sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ und $(f_n) \subset H^1(a,b)$ derart, dass (f_n') in $L^2(a,b)$ gegen ein $g \in L^2(a,b)$ konvergiert. Ferner gebe es ein $x_0 \in [a,b]$, sodass $(f_n(x_0))$ gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Zeige, dass (f_n) in $H^1(a,b)$ gegen ein $f \in H^1(a,b)$ konvergiert mit $f' = g$ und $f(x_0) = c$.