Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 21.06.12

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 7

22. Spektrum des Dirichlet-Laplaceoperators
Es seien H und V unendlich dimensionale Hilberträume und V kompakt und dicht in H eingebettet. Weiter sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch, stetig und koerziv. Zeige zunächst, dass es für alle $u \in V$ höchstens ein $f_u \in H$ gibt, sodass

$$a(u,v) = (f_u \mid v)_H \text{ für alle } v \in V.$$

Wir definieren nun

$$D(A) := \{u \in V : \exists f_u \in H \text{ mit } a(u,v) = (f_u \mid v)_H \ \forall v \in V\}$$

und $A : D(A) \to H$ durch $Au := f_u$. Zeige, dass die Eigenwerte des Operators A genau die Zahlen λ_n aus Satz 14.6 sind.

Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $V := H_0^1(\Omega)$ und $H := L^2(\Omega)$. Wir definieren $a : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ durch

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v.$$

Der Operator A heißt in diesem Fall auch *Dirichlet-Laplaceoperator*. Zeige, dass $c := \lambda_1^{-1}$ die kleinste Konstante ist, für welche die Poincaré-Ungleichung stimmt.

23. Zeige oder widerlege: Der Satz von Rellich bleibt richtig, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und unbeschränkt ist.

24. Satz von Riemann-Lebesgue
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ bezeichne

$$\hat{f}(x) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ixy} f(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

die Fouriertransformierte von f. Beweise folgende Aussagen:

(a) Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{f}$ stetig.

(b) Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ ist stetig als Funktion von $L^1(\mathbb{R}^d)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(c) Für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|\hat{f}(x)| \le \frac{c}{1 + |x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

und insbesondere ist $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Hinweis: Verwende Rechenregeln für die Fouriertransformation von Ableitungen.

(d) Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Hinweis: Offenbar ist $C_0(\mathbb{R}^d)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ abgeschlossen. Verwende außerdem (ohne Beweis), dass $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegt.