Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 28.06.12

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen Blatt 8

25. Die punktierte Kreisscheibe

Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bezeichne $\mathscr{H}(\Omega) := \{f \in C^2(\Omega) : \Delta f = 0\}$ die Menge der harmonischen Funktionen auf Ω.

Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und $B^\times := B \backslash \{(0,0)\}$.

(a) Bestimme alle Funktionen $f \in C^2((0,1))$ mit $rf''(r) + f'(r) = 0$ für alle $r \in (0,1)$.

(b) Es sei $u \in \mathscr{H}(B^\times) \cap C(\overline{B})$ mit $u(z) = 0$ für alle $|z| = 1$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix. Zeige, dass $u(x) = u(Ax)$ für alle $x \in \overline{B}$.

Hinweis: Verwende die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems.

(c) Es sei $u \in \mathscr{H}(B^\times) \cap C(\overline{B})$ mit $u(z) = 0$ für alle $|z| = 1$. Zeige, dass es eine Funktion $f \in C^2((0,1))$ gibt, sodass $u(x) = f(|x|)$ für alle $x \in B^\times$ und

$$\Delta u(x) = f''(|x|) + \frac{f'(|x|)}{|x|}.$$

(d) Es seien $u, v \in \mathscr{H}(B^\times) \cap C(\overline{B})$ mit $u_{|\partial B} = v_{|\partial B}$. Zeige, dass $u = v$.

(e) Zeige, dass $B^\times$ nicht Dirichlet-regulär ist.

(f) Für ein $g \in W(\partial B)$ und $c \in \mathbb{R}$ definieren wir $h \in C(\partial B^\times)$ durch

$$h(z) := \begin{cases} g(z) & z \in \partial B \\ c & z = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass das Dirichletproblem auf $B^\times$ mit Randwert h eine eindeutige H^1-Lösung besitzt.

(g) Für welche Randwerte $g \in C(\partial B)$ gibt es eine klassische Lösung $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ des Dirichletproblems auf B mit der Eigenschaft, dass $u(0) < u(x)$ für alle $x \in B^\times$?

26. Fortsetzung des Lösungsoperators

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zeige, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung $T : W(\partial\Omega) \to C_b(\Omega)$ linear ist.

Zeige weiter, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{T} : C(\partial\Omega) \to C_b(\Omega)$ gibt mit $\tilde{T}_{|W(\partial\Omega)} = T$ und $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Erinnerung: Sind X und Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear und stetig, so bezeichnet

$$\|T\| := \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \ \forall x \in X\}$$

die Norm von T.