Universität Ulm

Abgabe:
Bis 28.06.13, 8:15 Uhr
Briefkasten vor H3

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Sommersemester 13

26 Punkte

Übungen zur Analysis 1

Blatt 10

41. Es sei $(a_k) \subset \mathbb{R}$ derart, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent aber nicht absolut konvergent ist. Zeige, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung dieser Reihe gibt, die gegen x konvergiert. (6)

42. Wir definieren die *hyperbolischen Funktionen* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt: (6)

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Beweise die folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

(b) $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(c) $\cosh x = \cosh(-x)$ und $-\sinh x = \sinh(-x)$

(d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(e) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

43. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeige, dass (6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \cdot z^k = \frac{1}{(1-z)^3}.$$

44. In dieser Aufgabe wollen wir den Grenzwert (4x2)

$$C := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

untersuchen.

(a) Wie definieren $a_k := \frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k}$. Zeige, dass $0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

(c) Zeige, dass $C = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(d) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \log 2$ (vgl. Aufgabe 31(a)).