Seminar Hilberträume

Universität Ulm

Wolfgang Arendt und Moritz Gerlach

Sommersemester 2013

1 Bachelorseminar

1.1 Normierte Räume und Prähilberträume

- Definition: Normierter Raum, Folgenkonvergenz, Cauchyfolge, Vollständigkeit, Banachraum
- Eigenschaften: Dreiecksungleichung, Stetigkeit der Norm, Eindeutigkeit des Grenzwerts
- Lemma: Teilraum eines Banachraums ist genau dann vollständig, wenn abgeschlossen
- Beispiele: Endlichdimensionale Räume, Raum der beschränkten Funktionen mit Supremumsnorm, Räume stetiger beschränkter Funktionen, ℓ^p und L^p.
- Satz: Ein linearer Operator ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.
- Definition der Operatornorm
- Definition: Skalarprodukt, Prähilbertraum und Hilbertraum
- Lemma: Satz von Pythagoras und Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung
- Beispiele

Literatur: [Wer00, I, V], [AU10, Kapitel 4]

1.2 Orthogonale Projektionen

- Definition: Orthogonalität und orthogonales Komplement $M^\perp$ einer Menge M
- Eigenschaften: $M^\perp$ ist abgeschlossener Teilraum.
- Definition: Direkte Summe und (orthogonale) Projektion

- Beispiele: Nichteindeutigkeit der Projektion
- Projektionssatz: $\{0\} \neq U \subset H$ abgeschlossen, dann $H = U \oplus U^{\perp}$ und Projektion P erfüllt $\|P\| = 1$.
- Folgerung: Für Unterraum U gilt $\overline{U} = U^{\perp\perp}$

Literatur: [Wer00, V.3], [AU10, 4.4]

1.3 Orthonormalbasen

- Definition von Orthonormalsystem und Orthonormalbasis
- Bemerkung: Gram-Schmidt-Verfahren zur Orthonormalisierung
- Beschreibung der orthogonalen Projektion auf einen endlich-dimensionalen Teilraum
- Lemma: Eine gleichmäßig beschränkte Folge von Operatoren die auf einem dichten Teilraum konvergiert, konvergiert bereits überall.
- (Unbedingte und absolute) Konvergenz von Reihen in Banachräumen
- Satz: In einem Prähilbertraum mit ONB $\{e_n\}$ ist $x = \sum (x|e_k)e_k$ (abstrakte Fourierreihe) und $\|x\|^2 = \sum |(x|e_k)|^2$ (Bessels Identität)
- Satz: Jeder separable Hilbertraum ist unitär isomorph zu ℓ^2

Literatur: [Wer00, V.4], [AU10, 4.2]

1.4 Fourierreihen

- Definition von Fourierreihen von stetigen periodischen Funktionen
- Konvergenz der Reihen für stetig differenzierbare Funktionen (Satz von Dirichlet)
- Konvergenz in L^2-Norm mit der Hilbertraumtheorie

Literatur: [Kön04, S 330], [AU10, Satz 4.10]

1.5 Linearformen und Trennungssätze

- Definition von stetigen Linearformen und des Dualraums
- Darstellungssatz von Riesz-Fréchet
- Trennungssätze von Hahn-Banach (Trennung einer abgeschlossenen konvexen Menge von einem Punkt sowie von einer disjunkten kompakten konvexen Menge)

Literatur: [AU10, 4.5], [Wer00, V.3.6], [Are12, §11]

1.6 Hilbertraummethoden für partielle Differenzialgleichungen

- Definition von Sobolevräumen auf einem Intervall (a,b).
- Satz von Lax-Milgram
- Lösung der partiellen Differenzialgleichung $\lambda u - u'' = f$ mit Dirichlet-Randbedingungen

Literatur: [AU10, 5.1 und 5.2.1]

1.7 Fouriertransformation

Ziel des Vortrags ist der Satz von Plancherel

Satz. *Es gibt genau einen unitären Operator* $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ *sodass*

$$(\mathscr{F}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ixy} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Literatur: [Wer00, V.2]

1.8 Spektralsatz für kompakte Operatoren

Ziel des Vortrags ist es, folgenden Satz [Wer00, Satz VI.3.2] zu beweisen:
Sei T ein kompakter normaler (selbstadjungierter) Operatoren auf einem Hilbertraum H. Dann gibt es höchstens abzählbares Orthogonalsystem $\{e_1, e_2, \dots\}$ und eine Nullfolge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, sodass

$$H = \ker T \oplus \overline{\operatorname{span}}\{e_1, e_2, \dots\}$$

und

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \quad (x \in H).$$

Literatur: [Wer00, VI.3.2]

2 Masterseminar

2.1 Die schwache Topologie

- Einführung ist schwache Topologie, Problem 20
- Schwache Kompaktheit der Einheitskugel (Problem 23)
- Die schwache Topologie auf der Einheitskugel eines Hilbertraums H ist genau dann metrisierbar, wenn H separabel ist (Probleme 24 und 26)
- Die schwache Topologie auf einem unendlich dimensionalen Hilbertraum ist nicht metrisierbar (Problem 28)

Literatur: [Hal82, Ch 3]

2.2 Invariant Subspace Problem

Unter welchen Bedingungen besitzt ein Operator auf einem Banachraum einen nicht-trivialen invarianten Teilraum?

- Einführung und triviale Beobachtungen
- Jeder normale und jeder quasinormale Operator besitzt einen nicht-trivialen invarianten Teilraum.
- Satz von Lomonosov: Jeder Operator, der mit einem kompakten Operator kommutiert, hat einen nicht-trivialen invarianten Teilraum

Literatur: [AA02, Ch 10], [Yad05], [Hal82, Problem 196]

2.3 Satz von Gelfand-Naimark, kommutative Version

Satz. *Eine kommutative C^*-Algebra mit Einheit ist isometrisch $*$-isomorph zu $C(K)$ für einen kompakten Raum K.*

Folgerung: Funktionalkalkül für normale Operatoren.
Literatur: [Wer00, Theorem IX.3.4 und IX.3.8]

2.4 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Aufbauend auf Thema 2.3.

Satz. *Jeder selbstadjungierte Operator T auf H ist unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator. Genauer: Es gibt einen Maßraum (Ω, Σ, μ), eine beschränkte messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und einen unitären Operator $U : H \to L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, sodass*

$$Tx = U^{-1} M_f U x$$

für alle $x \in H$ wobei $M_f g := fg$ die Multiplikation mit f auf L^2 ist.

Literatur: [Wer00, Satz VII.1.13 bzw VII.1.21]

2.5 Satz von Gelfand-Naimark, nicht-kommutative Version (GNS-Darstellung)

Satz. *Eine C^*-Algebra mit Einheit ist isometrisch $*$-isomorph zu einem Unterraum von $\mathscr{L}(H)$ für einen Hilbertraum H.*

Literatur: [Wer00, Theorem IX.3.15]

2.6 Hilbert-Schmidt Operatoren

- Ein Operator $T \in \mathscr{L}(H)$ heißt **Hilbert-Schmidt**, falls es eine Orthonormalbasis $\{e_n\}$ gibt, sodass

$$\|T\|_{HS} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

- Auf $H = L^2[0,1]$ sind die Hilbert-Schmidt-Operatoren genau die, von der Form

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

  mit einer Funktion $k \in L^2[0,1]^2$.

- Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt (Problem 173)

Literatur: [Wer00, VI.6], [Hal82]

2.7 Partielle Isometrien und Polarzerlegung

- Ein Operator heißt **partielle Isometrie**, wenn er auf dem orthogonalen Komplement seines Kerns isometrisch ist.
- Definition von maximaler Isometrie und Charakterisierung als Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugel im Raum der Operatoren (Problem 136)
- Polarzerlegung: Jeder beschränkte Operator zwischen Hilberträumen ist das Produkt einer partiellen Isometrie und eines positiven Operators (Problem 134)

Literatur: [Hal82]

2.8 Ideale in $\mathscr{L}(H)$

Satz. *Sei H ein separabler Hilbertraum, dann sind die kompakten Operatoren das einzige abgeschlossene nicht-triviale Ideal in der Banachalgebra $\mathscr{L}(H)$.*

Literatur: [Mur90, Theorem 4.1.15], [Hal82, Problem 176]

2.9 Unitäre Dilatationen

Es sei K ein Unterraum des Hilbertraums H. Ein Operator $S \in \mathscr{L}(H)$ heißt Dilatation von $T \in \mathscr{L}(K)$, falls $PSx = Tx$ für alle $x \in K$. In diesem Vortrag soll unter anderem gezeigt werden, dass jede Kontraktion eine unitäre Dilatation besitzt.
Als Anwendung erhält man die Von-Neumann-Ungleichung [NFBK10, Prop 8.3]: Für jedes Polynom p und jeden kontraktiven Operator $T \in \mathscr{L}(H)$ ist

$$\|p(T)\| \leq \max_{|z|=1} |p(z)|$$

Literatur: [Hal82, Problems 222, 227], [NFBK10, I.4]

Literatur

[AA02] Yuri A Abramovich and Charalambos D Aliprantis, **An invitation to operator theory**, Amer Mathematical Society, 2002.

[Are12] W. Arendt, **Skript zur Vorlesung Hilberträume und Fouriertransformation**, 2012.

[AU10] W. Arendt and K. Urban, **Partielle Differenzialgleichungen**, Spektrum Akademischer Verlag, 2010.

[Hal82] Paul Richard Halmos, **A Hilbert space problem book**, vol. 19, Springer, 1982.

[Kön04] Konrad Königsberger, **Analysis 2**, fifth ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Mur90] Gerard J Murphy, **C*-algebras and operator theory**, vol. 288, Academic press Boston, 1990.

[NFBK10] Béla Sz Nagy, Ciprian Foias, Hari Bercovici, and László Kérchy, **Harmonic analysis of operators on hilbert space**, Springer, 2010.

[Wer00] Dirk Werner, **Funktionalanalysis**, extended ed., Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Yad05] BS Yadav, **The present state and heritages of the invariant subspace problem**, Milan Journal of Mathematics **73** (2005), no. 1, 289–316.