Übungen zu den Elementen der Funktionalanalysis Blatt 10

25. In dieser Aufgabe wollen wir die Differenzialgleichung $\lambda u - u'' = f$ mit sogenannten *Robin-Randbedinungen* lösen. Es sei dazu $\lambda > 0$, $f \in L^2(a,b)$ sowie $\alpha, \beta \geq 0$ gegeben. Für $u, v \in H^1(a,b)$ definieren wir

$$(u,v) := \lambda \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \beta u(b)v(b) + \alpha u(a)v(a)$$

auf $H^1(a,b)$.

(a) Zeige, dass $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ein äquivalentes Skalarprodukt auf $H^1(a,b)$ definiert. (2)

(b) Zeige, dass es genau eine Funktion $u \in H^2(a,b)$ gibt mit $\int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = (u,v)$ für alle $v \in H^1(a,b)$. (2)

(c) Zeige, dass es genau eine Funktion $u \in H^2(a,b)$ gibt mit (4)

$$\begin{aligned} \lambda u - u'' &= f \text{ auf } (a,b) \\ \alpha u(a) &= u'(a) \\ \beta u(b) &= -u'(b). \end{aligned}$$

26. Es seien $L, R \in \mathscr{L}(\ell^2)$ der Links- und Rechtsshift aus Aufgabe 6. Zeige: (3x2)

(a) $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

(b) $\sigma_p(R) = \emptyset$.

(c) $\sigma(L) = \sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.