Universität Ulm
Abgabe:
Mi, 16.07.14
in der Übung

Dr. M. Kunze
Dr. M. Gerlach
Sommersemester 14

14 Punkte

Übungen zu den Elementen der Funktionalanalysis Blatt 12

30. Es sei $\alpha > 0$. Für $f \in C[0,1]$ definieren wir

$$[f]_\alpha := \sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

und bezeichnen mit $C^\alpha[0,1] := \{f \in C[0,1] : [f]_\alpha < \infty\}$ den Vektorraum der *Hölderstetigen Funktionen zum Exponenten* α. Auf $C^\alpha[0,1]$ betrachten wir die Norm

$$\|f\|_\alpha := |f(0)| + [f]_\alpha.$$

(a) Zeige, dass für jede Menge $D \subset C^\alpha[0,1]$ mit $\sup_{f \in D} \|f\|_\alpha < \infty$ gilt: D ist relativ kompakt in $C[0,1]$. (3)

(b) Zeige, dass die Einbettung von $H^1(0,1)$ in $C^\alpha[0,1]$ für ein $\alpha > 0$ stetig ist und folgere daraus die Kompaktheit der Einbettung von $H^1(0,1)$ in $L^2(0,1)$. (3)

31. Auf $L^2(0,1)$ betrachten wir den durch

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

definierten Operator. Beweise die folgenden Eigenschaften von T.

(a) T ist kompakt. (3)

(b) $\sigma_p(T) = \emptyset$. (3)

(c) T ist nicht selbstadjungiert. (2)