Dr. M. Kunze
M. Gerlach
Sommersemester 14

14 Punkte

Übungen zur Elemente der Funktionalanalysis — Blatt 2

4. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir definieren

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} : \exists N \in \Sigma,\ \mu(N) = 0,\ f_{\Omega\setminus N} \text{ ist beschränkt}\}$$

und das *wesentliche Supremum*

$$\|f\|_\infty^* := \inf\left\{c > 0 : \exists N \in \Sigma,\ \mu(N) = 0,\ |f(\omega)| \le c\ \forall \omega \in \Omega \setminus N\right\}$$

für alle $f \in \mathscr{L}_\infty(\Omega)$.

(a) Zeige, dass es für alle $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ ein $N \in \Sigma$, $\mu(N) = 0$, gibt mit $\|f\|_\infty^* = \|f_{\Omega\setminus N}\|_\infty$. (3)

(b) Zeige, dass $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ ein halbnormierter Vektorraum ist. (2)

(c) Zeige, dass $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ vollständig ist. (3)

Nun identifizieren wir, wie bei der Definition von L^p, Funktionen $f, g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ falls $\|f - g\|_\infty^* = 0$. Genauer: Wir betrachten die Äquivalenzklassen $[f]$ der Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow \|f - g\|_\infty^* = 0$$

auf $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ und setzen $L^\infty(\Omega) := \{[f] : f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)\}$, versehen mit den Vektorraum-operationen $[f] + [g] := [f + g]$ und $\lambda[f] := [\lambda f]$ sowie der Norm $\|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty^*$. Man überzeuge sich davon, dass die Operationen wohldefiniert sind und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $L^\infty(\Omega)$ definiert.

(d) Zeige, dass $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. (1)

5. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $1 \le p < \infty$. Ferner sei $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ eine konvergente Folge mit $f := \lim f_n$. Zeige, dass es eine Teilfolge (f_{n_k}) gibt, die fast überall gegen f konvergiert und durch ein Element $h \in L^p(\Omega)$ dominiert ist (d.h. $|f_n(\omega)| \le h(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$). (5)

Anleitung: Konstruiere eine Teilfolge (f_{n_k}) derart, dass die Reihe über $(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})$ absolut konvergiert und folge dem Beweis der Vollständigkeit von L^p.

Bemerkung: Die Aussage stimmt (trivialerweise) auch für $p = \infty$.