Übungen zur Elemente der Funktionalanalysis Blatt 5

12. Es seien E und F reelle unitäre Räume.

(a) Zeige, dass (3)

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

für alle $x, y \in E$. Dies nennt man die *Polarisationsgleichung*.

(b) Zeige, dass eine lineare Abbildung $U : E \to F$ genau dann unitär ist, wenn sie isometrisch ist. (3)

Bemerkung: Teil (b) gilt auch in komplexen unitären Räumen, was man mit Hilfe einer komplexen Polarisationsgleichung zeigen kann.

13. Wir betrachten den Hilbertraum $H := L^2((0, 2\pi), \frac{\mathrm{d}t}{2\pi})$ mit der Orthonormalbasis $e_k(t) := e^{ikt}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Berechne die Fourierkoeffizienten $c_k := \langle f, e_k\rangle$ der Indikatorfunktion $f := \mathbb{1}_{[0,\pi]} \in H$. (3)

(b) Zeige, mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. (3)

(c) Berechne den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. (2)