Übungen zu den Elementen der Funktionentheorie Blatt 3

8. Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale. (14)

(a) $\int_\gamma \overline{z}^2 \, \mathrm{d}z$, wobei γ die gerade Wegstrecke $[0, 1+i]$ ist.

(b) $\int_\gamma \overline{z}^2 \, \mathrm{d}z$, wobei γ die Verkettung der Wegstrecken $[0,1]$ und $[1, 1+i]$ ist.

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1} \, \mathrm{d}z.$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \, \mathrm{d}z.$

(e) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3} \, \mathrm{d}z.$

(f) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}} \, \mathrm{d}z.$

(g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1-z^2} \, \mathrm{d}z$, wobei $\gamma \colon [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \begin{cases} 1 - e^{it} & t \in [0, 2\pi] \\ -1 + e^{-it} & t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}.$

9. Es sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Zeige, dass genau dann $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. (4)

10. Es sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, dass f genau dann ein Polynom ist, wenn Konstanten $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|f(z)| \leq a + b|z|^n$ für alle $z \in C$. (6)