Übungen zu den Elementen der Funktionentheorie Blatt 4

11. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Ist $|f|$ konstant, so ist f konstant. (4)

12. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion. Zeige, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. (4)

13. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Koeffizient a_n der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

von f mit Entwicklungspunkt z_0 Null ist. Wir zeigen, dass f ein Polynom ist. Gehe wie folgt vor:

(a) Zeige, dass jede überabzählbare Menge $D \subset \mathbb{C}$ einen Häufungspunkt besitzt. (2)

(b) Zeige, dass für die Mengen $D_n := \{z \in \mathbb{C} : f^{(n)}(z) = 0\}$ gilt: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_n = \mathbb{C}$. (1)

(c) Zeige, dass f ein Polynom ist. (3)

14. Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$.

(a) Zeige, dass die durch (3)

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $g\colon \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Zeige, dass $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. (3)

Hinweis: Wende für $r \in (0,1)$ das Maximumprinzip auf g und $B_r(0)$ an.

15. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Weiter sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir geben einen kurzen alternativen Beweis des Maximumprinzips auf $B_r(z_0)$.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in B_r(z_0)$ gilt: (2)

$$|f^n(z)| \leq \frac{r}{\operatorname{dist}(z, \partial B_r(z_0))} \cdot \max_{w \in \partial B_r(z_0)} |f^n(w)|$$

wobei $\operatorname{dist}(z, M) := \inf\{|z-w| : w \in M\}$ den *Abstand* von z zur Menge M bezeichne.

(b) Schlussfolgere aus (a), dass (2)

$$\max_{z \in B_r(z_0)} |f(z)| \leq \max_{w \in \partial B_r(z_0)} |f(w)|$$