Prof. Dr. W. Arendt
Dr. M. Gerlach
Sommersemester 14

0 Punkte

Übungen zu den Elementen der Funktionentheorie Blatt 6

Dieses Blatt wird nicht korrigiert und nicht bewertet. Die Aufgaben dienen der Klausurvorbereitung und werden in der Übung am Donnerstag, den 24. Juli, vorgestellt.

Bitte im Hochschulportal für die Vorleistung anmelden! Die Vorleistungen werden am 20./21. Juli verbucht, die Anmeldefrist für die Prüfung endet am 22. Juli um 23:59 Uhr!

21. Klassifiziere jeweils die Art der Singularität folgender Funktionen $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ im Punkt 0 und berechne den Koeffizient a_{-1} der Laurentreihenentwicklung von f auf einer punktierten Umgebung um 0.

(a) $f(z) := \frac{\cos z - 1}{z^2}$.

(b) $f(z) := \sin(1/z^2)$.

(c) $f(z) := \frac{1}{\exp(z)-1}$.

22. Berechne das uneigentliche Riemannintegral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Anleitung:

- Für $R>1$ definiere die Wege $\gamma_{1,R} := [-R,R]$ und $\gamma_{2,R}(t) := Re^{it}$ (für $t\in[0,\pi]$) sowie $\gamma_R := \gamma_{1,R}\oplus\gamma_{2,R}$. Berechne (mithilfe des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel oder unter Verwendung des Residuensatzes) den Wert des Kurvenintegrals
$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z.$$
- Zeige, dass
$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right| = 0$$
und schließe auf den Wert von $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. Zur Kontrolle: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.