Lösungen zur Klausur zu den Elementen der Funktionentheorie

1. Zeigen Sie anhand der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, dass die Funktion $f(z) := e^{iz}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. (10)

Lösung: Es sei

$$u(x,y) := \operatorname{Re} e^{i(x+iy)} = e^{-y}\cos x$$

und

$$v(x,y) := \operatorname{Im} e^{i(x+iy)} = e^{-y}\sin x.$$

Wegen $u_x(x,y) = -e^{-y}\sin x = v_y(x,y)$ und $u_y(x,y) = -e^{-y}\cos x = -v_x(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, erfüllt f in jedem Punkt die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen und ist somit holomorph.

2. Bestimmen Sie den Wert folgender Kurvenintegrale. (32)

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\overline{z}}{z}\,\mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_{|z-(1+i)|=\sqrt{2}} \frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=120} \exp\Big(-\frac{1}{z^2}\Big)\,\mathrm{d}z$

Lösung:

(a) Weil der Integrand holomorph in 0 fortgesetzt werden kann, verschwindet das Integral.

(b) Es ist

$$\int_{|z|=1} \frac{\overline{z}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-2it} i e^{it}\,\mathrm{d}t = -e^{-it}\,\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

(c) Von den beiden Polstellen des Nenners i und $-i$ liegt nur i in dem von der Kurve umrandeten Bereich. Es ist

$$\operatorname{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{2i}{i+i} = 1$$

und deshalb

$$\int_{|z-(1+i)|=\sqrt{2}} \frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot 1$$

nach dem Residuensatz. Alternativ ist

$$\frac{2z}{1+z^2} = \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$$

und nach der Cauchyschen Integralformel (und dem Integralsatz)

$$\int_{|z-(1+i)|=\sqrt{2}} \frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-i|=1} \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

(d) Wegen

$$\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{-2k}}{k!}$$

ist $\operatorname{Res}(f;0) = 0$. Also ist nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=120} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = 0.$$

Alternativ ist

$$\int_{|z|=120} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{|z|=120} z^{-2k} \,\mathrm{d}z = 0$$

weil alle Integranden eine Stammfunktion besitzen.

3. (a) Formulieren Sie den Satz von Liouville. (8)

(b) Zeigen Sie: Jedes nicht-konstante Polynom besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle. (10)

Lösung:

(a) Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

(b) Es sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Dann ist $\lim_{|z|\to\infty}|p(z)| = \infty$. Es gibt also $R > 0$ mit $|p(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$. Angenommen p hätte keine Nullstelle, dann wäre $c := \min_{z\in\overline{B_R(0)}}|p(z)| > 0$ und insgesamt also

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \min\left\{1, \frac{1}{c}\right\}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus dem Satz von Liouville folgt nun, dass die ganze Funktion $f(z) = 1/p(z)$ konstant ist. Dann ist aber p konstant im Widerspruch zur Voraussetzung. Also besitzt p in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

4. Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ sternförmige Gebiete und $\Omega_1 \cap \Omega_2$ zusammenhängend und nicht leer. Zeigen Sie, dass $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ein Elementargebiet ist. (10)

Lösung: Es sei $f\colon \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Weil sternförmige Gebiete Elementargebiete sind, existieren Stammfunktionen $F_1\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$ und $F_2\colon \Omega_2 \to \mathbb{C}$ von $f\,|_{\Omega_1}$ bzw $f\,|_{\Omega_2}$. Weil $F_1 - F_2$ auf der zusammenhängenden Menge $\Omega_1 \cap \Omega_2$ eine Stammfunktion von 0 ist, ist $F_1 - F_2 = c$ auf $\Omega_1 \cap \Omega_2$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Weil $F_2 + c$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f\,|_{\Omega_2}$ ist, ist die durch

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & z \in \Omega_1 \\ F_2 + c & z \in \Omega_2 \end{cases}$$

gegebene Funktion $F\colon \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f.

5. (a) Formulieren Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen. (10)

(b) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gelte $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(i) = f(-i)$. (8)

Lösung:

(a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe eine konvergente Folge $(z_n) \subset \Omega$ mit $z_n \neq z_m$ für $n \neq m$ und $w := \lim z_n \in \Omega$ derart, dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f = g$.

(b) Es sei $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) := f(-z)$. Dann ist g ebenfalls eine ganze Funktion und es ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Identitätssatz ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Daraus folgt die Behauptung.

6. Kreuzen Sie auf der ersten Seite des Klausurbogens an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Für jede korrekt klassifizierte Aussage erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort zwei Minuspunkte. Bei einer negative Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. (12)

(a) Die Potenzreihe der Funktion $f(z) = 1/(1 + z^2)$ mit Entwicklungspunkt $1 + i$ hat Konvergenzradius 1.

(b) Die Funktion $f(z) = 1/\sin z$ hat im Punkt 0 eine wesentliche Singularität.

(c) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, so ist auch $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ein Elementargebiet.

(d) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann ist $|f(i)| \leq \max_{|z-1|=15} |f(z)|$.

(e) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(w) = 5$ für unendlich viele $w \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Dann ist f konstant.

(f) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Für jede holomorphe und nullstellenfreie Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt es genau eine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(g(z))$.

Lösung:

(a) Wahr. Die nächste Singularität bei i hat vom Entwicklungspunkt den Abstand 1.

(b) Falsch. Die Singularität im Nullpunkt ist ein Pol erster Ordnung.

(c) Falsch. Z.B. das Komplement der Einheitskreisscheibe ist bekanntlich kein Elementargebiet.

(d) Wahr. Dies ist folgt direkt aus dem Maximumprinzip.

(e) Wahr. Dies folgt die direkt aus dem Identitätssatz, weil die Menge der $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$ und $f(w) = 5$ im abgeschlossenen Einheitskreis einen Häufungswert besitzt. Somit ist $f(z) = 5$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(f) Falsch. Dies stimmt nur auf Elementargebieten und die Funktion g ist außerdem nicht eindeutig bestimmt ($g + 2\pi ik$ ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ auch ein Logarithmus von f).