ulm university universität uulm

Elemente der Funktionentheorie

Wolfgang Arendt

Skript zur Vorlesung im Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Der Körper der komplexen Zahlen **3**

2 Komplexe Differenzierbarkeit **7**

3 Die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen **9**

4 Potenzreihen **13**

5 Stammfunktionen **19**

6 Wegintegrale und der Cauchysche Integralsatz **23**

7 Die Cauchysche Integralformel und der Hauptsatz **29**

8 Der Satz von Liouville **33**

9 Punktweiser Grenzwert holomorpher Funktionen **35**

10 Der Identitätssatz **39**

11 Das Maximumprinzip **41**

12 Der Satz von Morera **43**

13 Elementargebiete **45**

14 Laurentreihen **49**

15 Singularitäten **53**

16 Integralberechnung **57**

17 Homotopie und Windungszahl **59**

18 Residuenkalkül **63**

19 Der Riemannsche Abbildungssatz **67**

20 Die Riemannsche Vermutung **69**

Literaturverzeichnis **71**

Vorwort

Die Funktionentheorie fasziniert die Mathematiker durch ihre eleganten Beweise und verblüffenden Resultate sowie durch die Harmonie der Theorie. Ihr Hauptgegenstand sind (komplex-) differenzierbare Funktionen einer komplexen Variablen. Erstaunlicherweise haben diese sehr schöne Eigenschaften was Regelmäßigkeit, geometrisches und analytisches Verhalten anbetrifft. In dieser Vorlesung wollen wir die grundlegenden Eigenschaften holomorpher (d.h. komplex-differenzierbarer) Funktionen beweisen und erläutern. So ist eine komplex-differenzierbare Funktion beispielsweise automatisch unendlich oft differenzierbar und sogar analytisch, d.h. lokal durch eine Potenzreihe gegeben. Dies ist der Hauptsatz, den wir beweisen werden. Wir lernen außerdem einige Anwendungen wie den Residuenkalkül kennen. In jedem Fall beschränken wir uns in dieser Elementevorlesung auf das Essentielle.

Als weiterführende Literatur zur Vorlesung verweisen wir auf das Buch "Funktionentheorie" von Freitag und Busam [2].

1 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

den reellen Vektorraum, dessen Elemente wir in der Zahlenebene darstellen können. Die Addition ist durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

definiert, die Skalarmultiplikation für $c \in \mathbb{R}$ durch

$$c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \end{pmatrix}.$$

Durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

wird eine Multiplikation definiert, durch die $\mathbb{R}^2$ zu einem Körper wird, den wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen. Da

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix},$$

ist die Multiplikation konsistent mit der Skalarmultiplikation, wenn wir $(c, 0)^T \in \mathbb{C}$ mit $c \in \mathbb{R}$ identifizieren. Dies entspricht gerade der geometrischen Identifikation der reellen Zahlengerade als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist die Abbildung

$$c \mapsto \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

linear und multiplikativ. Damit wird $\mathbb{R}$ zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Die Elemente von $\mathbb{C}$ bezeichnen wir oft mit z. Die Körperaxiome

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \qquad \text{(Assoziativgesetz)}$$
$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \qquad \text{(Kommutativgesetz)}$$

nachzurechnen ist leicht, aber langweilig. Da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{C}$, ist $(1, 0)^T$ ein *neutrales Element* der Multiplikation.

Wir setzen $i := (0,1)^T$. Damit ist

$$i \cdot i = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Seit L. Euler 1777 nennnt man i die *imaginäre Einheit*. Wir setzen nun

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} =: x + iy = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

stellen also $(x,y)^T$ über der Basis $\{(1,0)^T, i\}$ des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ dar. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir den *Real-* und *Imaginärteil* von z als $\operatorname{Re} z := x$ und $\operatorname{Im} z := y$. Somit gilt also

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Man beachte, dass wir $1 \in \mathbb{R}$ mit $(1,0)^T \in \mathbb{C}$ identifizieren. Damit ist $i \cdot i = -1$ und die oben definierte Multiplikation schreibt sich

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

sie entspricht also genau dem Ausmultiplizieren der Klammern.

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ nennen wir $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, also den Abstand von z zu 0, den *Betrag von z*. Es gilt:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,\ |z_1z_2| = |z_1||z_2| \text{ und } \Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|.$$

Außerdem definieren wir die *zu z konjugiert komplex Zahl* $\overline{z}$ als $\overline{z} := z - iy$. Es gilt

$$|z|^2 = z\overline{z},\ \overline{\overline{z}} = z,\ \overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ sowie } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Ist $z = x + iy \neq 0$, so ist $z\overline{z} = |z|^2$ und also $z\overline{z}|z|^{-2} = 1$. Folglich ist

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Wir wissen nun, dass z ein Körper ist. Das Inverse einer Zahl z ist durch (1.1) gegeben. Der Betrag $|z|$ ist gerade der euklidische Abstand in der Ebene. Wir sagen, dass eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ gegen eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergiert und schreiben dafür $\lim z_n = z$, falls sie bzgl. der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^2$ konvergiert, d.h. falls $\lim|z_n - z| = 0$. Dann gilt $\lim z_n = z$ genau dann, wenn $\lim \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ und $\lim \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$. Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt. Wir schreiben gelegentlich auch $z_n \to z$ für $\lim z_n = z$.

Eigenschaften 1.1. *Die Operationen $+$, $\cdot$, $|\cdot|$, $\overline{\cdot}$ und die Inversenbildung sind stetig, d.h. für Folgen $(z_n), (w_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\lim z_n = z$ und $\lim w_n = w$ gilt:*

(a) $\lim(z_n + w_n) = z + w$

(b) $\lim(z_n \cdot w_n) = z \cdot w$.

(c) $\lim|z_n| = |z|$.

(d) $\lim \overline{z_n} = \overline{z}$.

(e) Falls $z \neq 0$, so ist auch $z_n \neq 0$ für genügend große Indizes n und es gilt $\lim z_n^{-1} = z^{-1}$.

Eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ heißt *Cauchyfolge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass $|z_n - z_m| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Ferner ist $\mathbb{C}$ *vollständig*, d.h. jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist konvergent. Das wissen wir aus Analysis 2, wo die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^d$ gezeigt wurde.

Es sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, falls es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = z.$$

In diesem Fall schreiben wir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := z$. Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat also zwei Bedeutungen: einmal die Reihe selbst, also die Folge ihrer Partialsummen, und zum anderen ihren Grenzwert, sofern dieser existiert.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Weil die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ monoton wachsend ist, ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann absolut konvergent, falls die Folge (s_n) beschränkt ist. In diesem Fall ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| := \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$$

und wir schreiben auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ erhalten wir:

Satz 1.2. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beispiel 1.3 (Geometrische Reihe). Es sei $|z| < 1$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} |z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n < \infty$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k$ und $s = \lim s_n$. Wegen

$$(1-z)s_n = (1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n) = 1 - z^{n+1}$$

ist $(1-z)s = \lim(1-z)s_n = \lim 1 - z^{n+1} = 1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.4. Aus Analysis 1 wissen wir, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \infty$ für alle $x \geq 0$. Also konvergiert die Reihe

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir wollen nun die in Beispiel 1.4 definierte *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ weiter untersuchen. Mit Hilfe des Cauchyprodukts zeigt man das *Exponentialgesetz* $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $1 = \exp(0) = \exp(z)\exp(-z)$ und folglich $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$. Wir schreiben auch $e^z := \exp(z)$. Aus der Stetigkeit der Konjugation erhält man, dass $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$. Insbesondere ist für $x \in \mathbb{R}$, wegen $\overline{ix} = -ix$, $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$. Daraus folgt, dass

$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}e^{-ix} = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\cos(x) := \mathrm{Re}\big(e^{ix}\big) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(x) := \mathrm{Im}\big(e^{ix}\big) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+!}}{(2k+1)!}.$$

Somit ist $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $x \mapsto e^i x$ ist also 2π-periodisch und parametrisiert den Einheitskreis: Für $x \in [0, 2\pi)$ ist x gerade die Bogenlänge des Bogens zwischen 0 und e^{ix}.

Das *Exponentialgesetz*

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$$

liefert

$$\cos(x+y) = \mathrm{Re}\, e^{i(x+y)} = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Diese und ähnliche Formeln sind sehr leicht aus der komplexen Exponentialfunktion herzuleiten. Deshalb führt man sie oft schon in Analysis I ein, wie es etwa in [1] dargestellt wird.

Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion erhalten wir auch die *Polardarstellung komplexer Zahlen*: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ derart, dass $z = |z|e^{i\varphi}$. Für $z \neq 0$ ist diese Darstellung bis auf Addition von $k2\pi$ zu φ (mit $k \in \mathbb{Z}$) eindeutig. Wählt man $\varphi \in (-\pi, \pi]$ so spricht man vom *Hauptwert* und setzt $\operatorname{Arg} z := \varphi$.

In Polarkoordinaten ist die Multiplikation komplexer Zahlen besonders einfach zu beschreiben. Es seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ mit $r_1, r_2 > 0$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{r_1} e^{-i\varphi_1} \\ |z_1| &= r_1 \\ \overline{z_1} &= r_1 e^{-i\varphi_1} \end{aligned}$$

Der Ausdruck "komplexe Zahl" wurde 1831 von C.F. Gauß eingeführt. Schon seit dem 16. Jahrhundert wurden mit formalen Ausdrücken wie $5 \pm \sqrt{-15}$ gerechnet (G. Cardano 1545). Die strenge Definition der komplexen Zahlen als Paare von reellen Zahlen geht auf W.R. Hamilton (1837) zurück.

2 Komplexe Differenzierbarkeit

Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls es zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine *Kreisscheibe*

$$B_r(z_0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

gibt, die ganz in Ω enthalten ist. Mit $\dot{B}_r(z_0) \coloneqq B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ bezeichnen wir die *punktierte Kreisscheibe.*

Es sei $g\colon \dot{B}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\lim_{z\to z_0} g(z) = a$, falls $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = a$ für jede Folge $(z_n) \subset \dot{B}_r(z_0)$ mit $\lim z_n = z_0$. Dies ist äquivalent zu folgender Aussage: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ sodass $0 < |z - z_0| < \delta$ impliziert, $|g(z) - a| < \varepsilon$.

Wir kommen nun zum wichtigsten Begriff in dieser Vorlesung.

Definition 2.1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *komplex-differenzierbar* in einem Punkt $z_0 \in \Omega$, falls

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert.

(b) Falls f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex-differenzierbar ist und die Ableitung $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig ist, so heißt f *holomorph*.

Erstaunlicherweise ist f schon holomorph, wenn f in jedem Punkt aus Ω komplex-differenzierbar ist. Mit anderen Worten: Die Stetigkeit der Ableitung f' von f ist automatisch erfüllt. Dies beweist man mit einem sehr schönen Argument (Integration über Dreieckswege), das auf E. Goursat 1883 zurückgeht. Wir wollen auf diese Subtilität hier nicht eingehen.

Der Begriff der holomprhen Funktion ist also völlig analog zum Begriff der stetigen Differenzierbarkeit aus der reellen Analysis. Deswegen ist es nicht verwunderlich, dass die folgenden Permanenzeigenschaften (mit den gleichen Beweisen) gültig sind.

Satz 2.2 (Rechenregeln)**.** *Es seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann gilt:*

(a) f ist stetig (d.h. $z_n \to z_0$ impliziert $f(z_n) \to f(z_0)$ für alle $z_0 \in \Omega$).

(b) $f \pm g$ sind holomorph mit $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

(c) $f \cdot g$ ist holomorph mit $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

(d) Ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, so ist auch $\frac{f}{g}$ auf Ω holomorph mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Diese Rechenregeln beweist man genauso wie die entsprechenden Regeln für reell-differenzierbare Funktionen.

Beispiel 2.3 (komplexe Polynome). (a) Sei $f(z) = z$. Dann ist $f'(z) = \lim_{w\to z} \frac{w-z}{w-z} = 1$. Nun zeigt man mit Satz 2.2 durch Induktion, dass für $f_n(z) \coloneqq z^n$, $f_n'(z) = nz^{n-1}$ gilt. Offenbar gilt die Behauptung für $n = 1$. Wenn sie für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, so folgt wegen $f_{n+1}(z) = zf_n(z)$ aus den Rechenregeln, dass

$$f'_{n+1}(z) = f'_n(z)z + f_n(z) = nz^{n-1}z + z^n = (n+1)z^n.$$

(b) Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein komplexes Polynom, wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Aus (a) und Satz 2.2 erhalten wir, dass

$$p'(z) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot k \cdot z^{k-1}.$$

Als nächstes wollen wir die Kettenregel notieren. Ihr Beweis erfolgt wie der des entsprechenden Satzes aus Analysis 1.

Satz 2.4 (Kettenregel)**.** *Es seien $\Omega, \Omega_1 \subset \mathbb{C}$ offene Mengen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sowie $g \colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, wobei $g(\Omega_1) \subset \Omega$. Dann ist $f \circ g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und*

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

für alle $z \in \Omega_1$.

Beispiel 2.5. (a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann definiert $g(z) \coloneqq f(z^2)$ eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g'(z) = f'(z^2)2z$.

(b) Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $B_r(z_0) \subset \Omega$. Sei außerdem $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Dann definiert $g(z) \coloneqq f(z_0 + a \cdot z)$ eine holomorphe Funktion $g : B_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $g'(z) = f'(z_0 + az) \cdot a$. Insbesondere ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z_0 + ta) = f'(z_0 + ta) \cdot a$$

für alle $t \in (-r, r)$.

3 Die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen

Im Folgenden wollen wir komplexe und reelle Differenzierbarkeit miteinander vergleichen. Wir beginnen mit einer einfacheren Überlegung, die lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ betrifft.

Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sodass

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann definiert $T_w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Tz \coloneqq zw$ eine Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Wir wollen Abbildungen dieser Form in diesem Abschnitt *Multiplikatoren* nennen. Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und schreiben $w = a + ib$, so gehört zu T_w die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

da ja

$$T_w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a+ib)(x+iy) = ax - by + i(bx+ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt, gehört zu der linearen Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Matrix der Form (3.1), so ist $Tz = wz$ für alle $z \in \mathbb{C}$ wobei $w = (a+ib)$, wenn wir wieder $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren. Multiplikatoren entsprechen also genau den Matrizen der Form (3.1).

Soweit unsere Überlegungen zu Multiplikatoren. Nun wiederholen wir den Begriff der Differenzierbarkeit aus der Analysis 2. Eine Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt *affin*, falls es $b \in \mathbb{R}^2$ und eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt, sodass

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b.$$

Affine Abbildungen sind also lineare Abbildungen gefolgt von einer Verschiebung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Man nennt eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt durch eine affine Abbildung approximiert werden kann. Die genaue Definition lautet wie folgt.

Definition 3.1. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion mit Komponenten $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$, d.h.

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt f *differenzierbar*, wenn es zu jedem $w \in \Omega$ eine Matrix $Df(w) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt, sodass

$$f(w+h) = f(w) + Df(w)h + r(h)$$

für eine Funktion r mit $\lim_{|h|\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

Wir vergleichen also im festen Punkt w die Abbildung $h \mapsto f(w+h)$ und die affine Abbildung $h \mapsto f(w) + Df(w)h$. Die Definition verlangt, dass die Differenz $r(h)$, d.h. der Fehler dabei, klein – nämlich von der Größenordnung $o(h)$ – ist. Ist f differenzierbar, so existieren die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y und $Df(w)$ ist die *Jacobi-Matrix*

$$Df(w) = \begin{pmatrix} u_x(w) & u_y(w) \\ v_x(w) & v_y(w) \end{pmatrix}.$$

Wir sagen, dass f *stetig differenzierbar* ist, falls f differenzierbar und die Abbildung $w \mapsto Df(w) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ auf Ω stetig ist. Es gilt folgender Satz.

Satz 3.2. *Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y existieren und stetig sind.*

Also ist stetig differenzierbar äquivalent zu stetig partiell-differenzierbar. Das beweist man in Analysis 2.

Sei nun $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f komplex-differenzierbar, wenn es in jedem $z \in \Omega$ ein $f'(z) \in \mathbb{C}$ gibt, sodass für die in einer Umgebung von 0 definierte Funktion

$$r(h) \coloneqq f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h$$

gilt: $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Wir approximieren also die Funktion $h \mapsto f(z+h)$ durch die $\mathbb{C}$-affine (d.h. $\mathbb{C}$-lineare Abbildung gefolgt von einer Verschiebung) Funktion $h \mapsto f(z) + f'(z) \cdot h$. Sei nun $u \coloneqq \operatorname{Re} f$ und $v \coloneqq \operatorname{Im} f$, also

$$f(z) = u(z) + iv(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}.$$

Da auch $\lim \frac{r(h)}{|h|} = 0$ ist f auch reell-differenzierbar und

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$Df(z) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = f'(z) \cdot (h_1 + ih_2).$$

Das bedeutet aber nach (3.1), dass

$$u_x(z) = v_y(z),\ u_y(z) = -v_x(z)$$

und $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$. Schreiben wir nun $u(x,y) = u(z)$ für $z = x + iy$, so haben wir also gesehen, dass u und v die *Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen*

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x \tag{CR}$$

erfüllen. Ist umgekehrt $f = u + iv\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ derart, dass (CR) gilt, so wissen wir, dass f reell-differenzierbar ist und somit für

$$r(h) \coloneqq f(z+h) - f(z) - Df(z)h$$

gilt $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$. Hier ist nun wegen (CR)

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & -v_x(z) \\ u_x(z) & v_x(z) \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $Df(z)(h_1, h_2)^T = f'(z)(h_1 + ih_2)$ für $f'(z) \coloneqq u_x(z) + iv_x(z)$. Es ist also

$$r(h) = f(z+h) - f(z) - f'(z)h$$

für alle (genügend kleine) h. Damit ist f komplex-differenzierbar. Wir haben folgenden Satz bewiesen, der holomorphe Funktionen reell beschreibt.

Satz 3.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv$ mit $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

(ii) Die Funktionen u und v sind stetig partiell differenzierbar mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

In diesem Fall ist $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$.

Beispiel 3.4 (Exponentialfunktion). Für die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt $\exp = u + iv$ mit $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$. Damit ist

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= e^x \cos y = e^x \sin' y = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -e^x \sin y = -v_x(x,y). \end{aligned}$$

Die Funktionen u und v sind also stetig partiell differenzierbar und erfüllen (CR). Damit ist die Exponentialfunktion holomorph.

Im nächsten Abschnitt werden wir einen weiteren strukturellen Beweis der Holomorphie der Exponentialfunktion kennenlernen.

Definition 3.5. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls die zweiten partiellen Ableitungen existieren und

$$\Delta u \coloneqq u_{xx} + u_{yy} = 0$$

auf Ω gilt. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ heißt *Laplaceoperator*.

Satz 3.6. *Sei $\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sind $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ zweimal stetig differenzierbar, so sind u und v harmonisch.*

Beweis. Da $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, ist $u_{xx} = v_{yx}$ und $v_{yy} = -v_{xy}$. Da nach dem Satz von Schwarz $v_{xy} = v_{yx}$, folgt die Behauptung. □

Wir werden später sehen, dass der Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion automatisch beliebig oft differenzierbar sind, d.h. die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren. Damit sind also Real- und Imaginärteil jeder holomorphen Funktion harmonisch.

Ferner werden wir auf die umgekehrte Frage eingehen: Ist jede harmonische Funktion auf Ω der Realteil einer holomorphen Funktion? Die Antwort hängt von der Gestalt der Menge Ω ab. Man kann die offenen Mengen Ω genau beschreiben, für die diese Aussage richtig ist. Wir werden im Abschnitt 13 darauf zurückkommen.

4 Potenzreihen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Wachsen die Koeffizienten (a_n) nicht zu stark, dann stellt sie auf einer Kreisscheibe eine holomorphe Funktion dar.

Definition 4.1. Es sei $g_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Folge von Funktionen. Wir sagen, dass (g_n) *gleichmäßig* gegen eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *konvergiert*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $z \in \Omega$.

Aus Analysis 1 ist bekannt, dass die Grenzfunktion g stetig ist, sofern alle Funktionen g_n stetig sind. In anderen Worten: Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig.

Besonders interessant sind gleichmäßig konvergente Reihen.

Definition 4.2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen unf $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ auf Ω *normal konvergiert*, falls es Zahlen $q_n \geq 0$ gibt, sodass

(a) $|f_n(z)| \leq q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \Omega$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} q_n < \infty$.

Konvergiert eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ normal auf Ω, so konvergiert sie auch gleichmäßig auf Ω und $f(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ definiert eine stetige Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$.

Wir kommen nun zur Definition einer Potenzreihe.

Definition 4.3. Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Der Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißt *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* z_0 und *Koeffizienten* a_n.

Satz 4.4 (Konvergenzradius)**.** *Für eine Koeffizientenfolge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ definieren wir*

$$R \coloneqq \sup\{r \geq 0 : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |a_n r^n| < \infty\} \in [0, \infty].$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ normal in $B_r(0)$ für alle $0 < r < R$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Man nennt die Größe R aus Satz 4.4 den *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Wir erinnern daran, dass $\lim b_n = 0$ eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist. Für eine Zahl $q \geq 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ genau dann, wenn $q < 1$. Für $q > 1$ ist $\lim q^n = \infty$.

Beweis. Es sei $R > 0$ und $0 < r < R$ sowie $r < \varrho < R$. Dann gibt es $c \geq 0$ derart, dass $|a_n|\varrho^n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$|a_n|r^n \leq |a_n|\varrho^n \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \leq c \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n.$$

Da $r/\varrho < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ normal in $B_r(0)$.

Nun sei $R < \infty$ und $|z| > R$. Dann ist $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, weshalb die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert. □

Aus dem Beweis ziehen wir die

Folgerung 4.5. *Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in C$. Die Reihe*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergiert normal in $B_r(z_0)$ für alle $r < R$. Damit ist $f\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig.

Den Konvergenzradius einer Reihe kann man durch folgende Formel aus den Koeffizienten bestimmen.

Satz 4.6 (Hadamard)**.** *Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ und $\varrho := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Dann ist $R = \frac{1}{\varrho}$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\frac{1}{\varrho} \leq R$. Das ist trivial, wenn $\varrho = \infty$. Sei nun $\varrho < \infty$ und $0 < r < \frac{1}{\varrho}$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass $r \leq R$. Da $\frac{1}{r} > \varrho$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{r}$ für alle $n \geq n_0$. Deshalb ist $r^n|a_n| \leq 1$ für alle $n \geq n_0$ und somit $r \leq R$.

Wir zeigen nun, dass $R \leq \frac{1}{\varrho}$. Das ist trivial, wenn $\varrho = 0$. Sei also $\varrho > 0$ und sei $r > \frac{1}{\varrho}$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass $r \geq R$. Wähle $\frac{1}{r} < s < \varrho$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n|^{1/n} \geq s$ für alle $n \geq n_0$. Deshalb ist

$$r^n|a_n| \geq (rs)^n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Daraus folgt, dass $r \geq R$. □

Lemma 4.7 (Abgeleitete Reihe)**.** *Sei R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann hat die formal abgeleitete Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

ebenfalls den Konvergenzradius R.

Beweis. Es sei R' der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe. Wir zeigen zunächst, dass $R \leq R'$. Wir dazu annehmen, dass $R > 0$ und wählen $r < R$ und $r < s < R$. Dann gibt es $d \geq 0$ derart, dass $|a_n|s^n \leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $r/s < 1$ ist

$$c := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (n+1) \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^n \right\} < \infty.$$

Damit ist

$$(n+1)|a_{n+1}|r^n = |a_{n+1}|s^n(n+1)\left(\frac{r}{s}\right)^n \leq \frac{d}{s} \cdot c$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $r \leq R'$ und folglich $R \leq R'$.

Wir zeigen nun, dass $R' \leq R$. Sei dazu $R' > 0$ und $0 \leq r < R'$. Dann gibt es $c \geq 0$ derart, dass $r^{n-1}n|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil insbesondere $r^n|a_n| \leq rc$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist also $r \leq R$. Daraus folgt, dass $R' \leq R$. $\square$

Theorem 4.8. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann definiert*

$$f(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

eine holomorphe Funktion $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$. *Es gilt*

$$f'(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$$

für alle $z \in B_R(z_0)$.

Beweis. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$. Sei $b \in B_R(0)$ und $|b| < r < R$. Für $z \in B_r(0)$ ist $z^n - b^n = (z-b)q_n(z)$ mit

$$q_n(z) \coloneqq z^{n-1} + bz^{n-2} + b^2z^{n-3} + \cdots + zb^{n-2} + b^{n-1}.$$

Insbesondere ist $q_n(b) = nb^{n-1}$. Betrachte nun die Reihe

$$g(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(z).$$

Sie konvergiert normal in $B_r(0)$, da für $z \in B_r(0)$ gilt

$$|a_n||q_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=1}^{n} r^{n-k}|b|^{k-1} \leq |a_n|nr^{n-1}$$

und $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|nr^{n-1} < \infty$ weil $r < R$. Somit ist $g : B_r(0) \to \mathbb{C}$ stetig. Ferner ist

$$g(z)(z-b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(z)(z-b) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n z^n - a_n b^n) = f(z) - f(b).$$

Da $b \in B_R(0)$, folgt nun

$$f'(b) = \lim_{z \to b} \frac{f(z) - f(b)}{z - b} = \lim_{z \to b} g(z) = g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n nb^{n-1}.$$

$\square$

Korollar 4.9. *Die durch eine Potenzreihe* $f(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *mit Konvergenzradius* $R > 0$ *gegebene Funktion ist auf* $B_R(z_0)$ *beliebig oft komplex differenzierbar und*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Induktiv sieht man, dass für die k-te Ableitung $f^{(k)}$ von f gilt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot \dots \cdot (n-k+1) z^{n-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich ist $f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1 = a_k k!$ wie behauptet. □

Definition 4.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, falls zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset \Omega$ und eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Konvergenzradius $R \geq r$ existieren, sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

für alle $z \in B_r(z_0)$. Man sagt auch, dass f lokal in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Wir haben also gesehen, dass jede analytische Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Sie ist sogar beliebig oft komplex differenzierbar und alle ihre Ableitungen $f^{(k)}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sind wieder analytisch und insbesondere holomorph.

Beispiel 4.11. (a) Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $R = \infty$. Das sieht man am einfachsten aus dem Quotientenkriterium: Es zeigt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} < \infty$ für alle $r > 0$. Aus Theorem 4.8 folgt, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, was wir auch schon mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen nachgewiesen haben. Aus Theorem 4.8 folgt auch noch, dass $\exp'(z) = \exp(z)$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Für relle Argumente wissen wir das schon aus Analysis 1.

(b) Die komplexe Kosinusfunktion

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

hat den Konvergenzradius $R = \infty$, ebenso die Sinusfunktion

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

(c) Die geometrische Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

hat den Konvergenzradius 1. Sie konvergiert in keinem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, weil in diesem Fall z^n keine Nullfolge ist.

(d) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

hat den Konvergenzradius 1. Sie konvergiert in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(e) Die *logarithmische Reihe*

$$\log(z+1) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

hat den Konvergenzradius 1. Sie divergiert in $z = -1$, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, und konvergiert für jedes andere $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

5 Stammfunktionen

Aus Analysis 1 wissen wir, dass jede stetige Funktion, die auf einem reellen Intervall definiert ist, eine Stammfunktion besitzt. Wir fragen uns nun, ob eine analoge Aussage auch für holomorphe Funktionen gilt. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Gibt es eine holomorphe Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$? Wir werden eine positive Antwort auf diese Frage geben, wenn die Menge Ω sternförmig ist. In diesem Fall können wir eine Stammfunktion sehr leicht durch Integration konstruieren. Für beliebige Gebiete (z.B. für $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) ist die Aussage falsch und es ist ein zentrales Thema der Funktionentheorie, die Gebiete zu charakterisieren, auf denen jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion besitzt. Darauf werden wir im Abschnitt 13 und 19 wieder eingehen. Zunächst definieren wir das Riemannintegral von komplexwertigen Funktionen einer reellen Variablen.

Definition 5.1. Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei auf der rechten Seite die üblichen Riemannintegrale reellwertiger Funktionen stehen.

Eigenschaften 5.2. *Für alle stetigen Funktionen $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und alle $c \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_a^b cf(t)\,\mathrm{d}t = c\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

(c) $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

Beweis. (a) Folgt unmittelbar aus der Additivität des Riemannintegrals für reellwertige Funktionen.

(b) Es sei $c = \alpha + i\beta$ und $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \alpha u(t) - \beta v(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \alpha v(t) + \beta u(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \alpha\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t - \beta\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t + i\left[\alpha\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &= c\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$. Dann ist

$$|z| = r = e^{-i\varphi} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\varphi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

nach (b). Folglich ist

$$|z| = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\varphi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} f(t)\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

Definition 5.3. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *stetig differenzierbar*, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig differenzierbar sind. In diesem Fall setzen wir $f' \coloneqq (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$.

Eigenschaften 5.4. *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

(a) $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$ *(reeller Hauptsatz)*

(b) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ *(Produktregel)*

(c) $\displaystyle\int_a^b fg'\,\mathrm{d}t = f(z)g(z)\Big|_{z=a}^{z=b} - \int_a^b f'g\,\mathrm{d}t$ *(partielles Integrieren)*

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b (\operatorname{Im} f)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{Re} f(b) - \operatorname{Re} f(a) + i(\operatorname{Im} f(b) - \operatorname{Im} f(a)) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

(b) Diese Aussage beweist man wie im reellen Fall oder durch Anwenden der reellen Produktregel auf Real- und Imaginärteil.

(c) Es ist

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f \cdot g)'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a). \qquad \square$$

Wir wollen nun Integrale studieren, die von einem komplexen Parameter abhängen. Der folgende Satz besagt, das wir unter dem Integral komplex differenzieren dürfen.

Satz 5.5 (komplexe Ableitung unter dem Integral)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Es gelte*

(a) $f(t,\cdot)\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *ist für jedes $t \in [a,b]$ komplex-differenzierbar und*

(b) $\partial_2 f\colon [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

Dann ist die durch $F(z) \coloneqq \int_a^b f(t,z)\,\mathrm{d}t$ gegebene Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$F'(z) = \int_a^b \partial_2 f(t,z)\,\mathrm{d}t$$

für alle $z \in \Omega$.

Hier ist $\partial_2 f$ die komplexe partielle Ableitung nach der zweiten Variablen, d.h.

$$\partial_2 f(t, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(t,z) - f(t,z_0)}{z - z_0}.$$

Beweis. Für $z \in \Omega$ sei $G(z) := \int_a^b \partial_2 f(t,z)\,\mathrm{d}t$. Wir zeigen, dass $F' = G$. Sei dazu $z \in \Omega$ fest und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(z)} \subset \Omega$. Da $\partial_2 f$ stetig ist, ist $\partial_2 f$ auf der kompakten Menge $[a,b] \times \overline{B_r(z)}$ gleichmäßig stetig. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $0 < \delta < r$ derart, dass

$$|\partial_2 f(t, z+h) - \partial_2 f(t,z)| < \varepsilon$$

für alle $t \in [a,b]$ und $|h| \leq \delta$. Für $0 < |h| \leq \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(F(z+h) - F(z)\right) - G(z) &= \int_a^b \left[\frac{1}{h}(f(t,z+h) - f(t,z)) - \partial_2 f(t,z)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(t, z+sh)\,\mathrm{d}s - \partial_2 f(t,z)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\frac{1}{h}\int_0^1 \partial_2 f(t, z+sh)\cdot h\,\mathrm{d}s - \partial_2 f(t,z)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \int_0^1 \left[\partial_2(t, z+sh) - \partial_2 f(t,z)\right] \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) - G(z)\right| &\leq \int_a^b \int_0^1 |\partial_2(t, z+sh) - \partial_2 f(t,z)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\leq (b-a) \sup_{\substack{t\in[a,b],\\ s\in[0,1]}} |\partial_2(t,z+sh) - \partial_2 f(t,z)| \leq (b-a)\cdot\varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist $F'(z) = \lim_{h\to\ 0} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = G(z)$. Wir zeigen nun, dass $F' = G$ stetig ist. Sei dazu $(z_n) \subset \Omega$ mit $\lim z_n = z \in \Omega$ gegeben und $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\partial_2 f$ gibt es $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [a,b]$ und $w \in \overline{B_\delta(z)}$ gilt

$$|\partial_2 f(t,w) - \partial_2 f(t,z)| < \varepsilon.$$

Somit ist

$$|F'(z_n) - F'(z)| = \left|\int_a^b \partial_2 f(t,z_n) - \partial_2 f(t,z)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\cdot \sup_{t\in[a,b]} |\partial_2 f(t,z_n) - \partial_2 f(t,z)| \leq (b-a)\cdot\varepsilon$$

für n groß genug, dass $z_n \in B_\delta(z)$. ☐

Definition 5.6. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine holomorphe Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \Omega$.

Beispiel 5.7. (a) exp ist eine Stammfunktion von exp.

(b) sin ist eine Stammfunktion von cos und cos ist eine Stammfunktion von $-\sin$.

(c) Es sei $f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat nach Lemma 4.7 die Reihe

$$F(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

auch den Konvergenzradius R und F ist auf $B_R(0)$ eine Stammfunktion von f.

(d) Es sei $f(z) := \frac{1}{z+1}$ auf $B_1(0)$. Dann definiert $F(z) = \log(1+z)$ siehe Beispiel 4.11 (e) eine Stammfunktion von f. In der Tat ist

$$F(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

und somit

$$F'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}$$

für alle $z \in B_1(0)$.

Definition 5.8. Es seien $a, z \in \mathbb{C}$. Dann nennen wir

$$[a, z] := \{a + t(z - a) : t \in [0, 1]\}$$

ein *Segment*. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $[a, z] \in \Omega$ für alle $z \in \Omega$. Wenn wir a präzisieren wollen, sagen wir auch, dass Ω *sternförmig bzgl. a* ist.

Beispiel 5.9. (a) Eine Kugel $B_r(a)$ ist sternförmig.

(b) Jedes Rechteck ist sternförmig.

(c) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \Omega$ ein innerer Punkt von Ω. Dann ist $\Omega \setminus \{z_0\}$ nicht sternförmig.

Auf sternförmigen Gebieten können wir zu jeder holomorphen Funktion leicht eine Stammfunktion angeben. Das besagt der nächste Satz, der Hauptsatz dieses Abschnitts.

Theorem 5.10 (Stammfunktionen)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine sternförmige, offene Menge. Dann besitzt jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion.*

Beweis. Wir können annehmen, dass Ω bzgl. 0 sternförmig ist, sonst verschieben wir Ω. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $z \in \Omega$ definieren wir

$$F(z) = \int_0^1 f(tz)z \, \mathrm{d}t.$$

Nach Satz 5.5, angewandt auf $h(t, z) = f(tz)z$, ist F holomorph auf Ω mit

$$\begin{aligned} F'(z) &= \int_0^1 (f(tz) + f'(tz)tz) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(tz) \, \mathrm{d}t + \int_0^1 t \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(tz) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(tz) \, \mathrm{d}t - \int_0^1 f(tz) \, \mathrm{d}t + f(z) = f(z) \end{aligned}$$

wobei wir einmal reell partiell integriert haben. $\square$

Theorem 5.10 ist das wichtigste Argument im Beweis des Hauptsatzes der Funktionentheorie (Satz 7.4), der besagt, dass jede holomorphe Funktion analytisch ist. Insbesondere zeigt dieser, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion wieder holomorph ist. Das erklärt, warum wir in Theorem 5.10 vorausgesetzt haben, dass die Funktion f holomorph ist. In der reellen Analysis ist das anders: Da konstruiert man zu jeder stetigen Funktion eine Stammfunktion, die dann aber nur einmal stetig differenzierbar ist.

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F+c$ eine solche. In der Situation von Theorem 5.10 werden auf diese Weise alle Stammfunktionen gefunden. Wir kommen auf die Eindeutigkeit zurück (Korollar 6.14).

6 Wegintegrale und der Cauchysche Integralsatz

In dieser Vorlesung definieren wir Wegintegrale einer holomorphen Funktion. Zentral ist der Satz von Cauchy, der besagt, dass das Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg verschwindet, falls das zugrunde liegende Gebiet sternförmig ist.

Definition 6.1. Ein *Weg* ist eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, d.h. eine stetige Funktion γ, für die es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

gibt, sodass für alle $i = 1, \ldots, n$ die Einschränkung $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ stetig differenzierbar ist. Man nennt $\operatorname{sp}(\gamma) \coloneqq \gamma([a,b])$ die *Spur* von γ. Der Weg γ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Wir werden im Folgenden ohne weitere Verweise die obige Zerlegung benutzen.

Beispiel 6.2. (a) Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma(t) \coloneqq z_1 + t(z_2 - z_1).$$

Dann ist $\operatorname{sp}(\gamma) = [z_1, z_2]$, das Segment zwischen den Punkten z_1 und z_2.

(b) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Es sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma(t) \coloneqq z_0 + re^{it}.$$

Dann ist γ ein geschlossener Weg und $\operatorname{sp}(\gamma)$ ist der Kreis mit Radius r und um den Mittelpunkt z_0.

Definition 6.3. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Wir setzen $\dot\gamma(t) \coloneqq \gamma'(t)$ auf den Intervallen (t_{i-1}, t_i) für $i = 1, \ldots, n$. Damit hat $\dot\gamma$ eine stetige Fortsetzung auf $[t_{i-1}, t_i]$. Wir nennen

$$L(\gamma) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t)| \,\mathrm{d}t$$

die Weglänge von γ.

Bemerkung 6.4. (a) Diese Definition ist unabhängig von der Zerlegung des Intervalls $[a,b]$.

(b) Approximiert man γ durch Polygone, so wird man

$$L'(\gamma) \coloneqq \sup \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

als Weglänge definieren, wobei das Supremum über alle Partitionen $a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}$ gebildet wird (man mache eine Zeichnung!). Es gilt tatsächlich:

Satz. $L'(\gamma) = L(\gamma)$

Beweis. „$\leq$“: Sei $a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Partition. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} |\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = L(\gamma),\end{aligned}$$

„$\geq$“: Sei $\epsilon > 0$. Da $\dot\gamma$ gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$, sodass

$$|t-s| \leq \delta \;\Rightarrow\; |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \epsilon.$$

Sei $a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Partition mit $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$. Dann ist

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist

$$\begin{aligned}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_{i-1})|\,\mathrm{d}t + |t_i - t_{i-1}| \cdot |\dot\gamma(t_{i-1})| \\ &\leq \epsilon|t_i - t_{i-1}| + |(t_i - t_{i-1}) \cdot \dot\gamma(t_{i-1})| \\ &= \epsilon|t_i - t_{i-1}| + |\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t_{i-1})\,\mathrm{d}t| \\ &\leq \epsilon|t_i - t_{i-1}| + |\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t_{i-1}) - \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t| + |\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t| \\ &\leq 2\epsilon(t_i - t_{i-1}) + |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.\end{aligned}$$

Wenn wir aufsummieren, erhalten wir

$$L(\gamma) \leq 2\epsilon(b-a) + L'(\gamma).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $L(\gamma) \leq L'(\gamma)$. □

Definition 6.5 (Wegintegral)**.** Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f\colon \operatorname{sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.1}$$

Siehe Kapitel 5 für die Definition der Integrale auf der rechten Seite von (6.1). Man sieht leicht, dass die Definitoon nicht von der gewählten Unterteilung abhängt, d.h. wenn $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$ eine weitere Unterteilung von $[a,b]$ ist mit der Eigenschaft, dass γ auf jedem Intervall $[s_{j-1}, s_j]$ stetig differenzierbar ist, so erhält man in (6.1) den gleichen Wert.

Eigenschaften 6.6. *Es sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein Weg und* $f, g\colon \operatorname{sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ *stetig.*

(a) Es gilt

$$\int_\gamma (f+g)(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$$

sowie

$$w \cdot \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma w \cdot f(z)\,\mathrm{d}z$$

für alle $w \in \mathbb{C}$.

(b) Es gilt die Fundamentalabschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq L(\gamma) \cdot c$$

mit $c \coloneqq \sup_{z \in \operatorname{sp}(\gamma)} |f(z)|$.

Diese Eigenschaften folgen, wie auch die Aussagen des folgenden Lemmas, unmittelbar aus den Definitionen.

Lemma 6.7. *Es sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein Weg.*

(a) Für den durch $\gamma_0(t) \coloneqq \gamma(a + t(b-a))$ *gegebenen Weg* $\gamma_0\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ *gilt* $\operatorname{sp}(\gamma) = \operatorname{sp}(\gamma_0)$ *und*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für alle stetigen Funktionen $f\colon \operatorname{sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$.

(b) Für den durch $\gamma^-(t) \coloneqq \gamma(b + a - t)$ *gegebenen Weg gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für alle stetigen Funktionen $f\colon \operatorname{sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$.

(c) Es sei $\gamma_1\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ *ein Weg mit* $\gamma_1(a_1) = \gamma(b)$. *Weiter sei* $\Omega \coloneqq \operatorname{sp}(\gamma) \cup \operatorname{sp}(\gamma_1)$ *und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig. Wir definieren* $\gamma_2\colon [a, b + b_1 - a_1] \to \mathbb{C}$ *durch* $\gamma_2(t) \coloneqq \gamma(t)$ *für* $t \in [a,b]$ *und* $\gamma_2(t) \coloneqq \gamma_1(t - b + a_1)$ *für* $t \in (b, b + b_1 - a_1)$. *Dann ist*

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Wir schreiben auch $\gamma \oplus \gamma_1 \coloneqq \gamma_2$.

Lemma 6.8. *Es sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein Weg und* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph mit* $\operatorname{sp}(\gamma) \subset \Omega$. *Dann ist*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$$

auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$.

Beweis. Das beweist man wie im Reellen. Alternativ kann man auch Analysis 2 benutzen: Sei $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ und $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t), y(t)) = u_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) = \mathrm{Re}\left(f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right). \quad \square$$

Der folgende Satz von Cauchy ist der Hauptsatz dieses Abschnitts.

Theorem 6.9 (Cauchyscher Integralsatz)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner sei $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ ein geschlossener Weg. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. Nach Theorem 5.10 hat f eine Stammfunktion F. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

auf $[t_{j-1}, t_j]$. Es ist also

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1}))\right] \\ &= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Der Satz von Cauchy hat sehr viele Konsequenzen und Anwendungen, wie wir sehen werden. Die Sternförmigkeit ist eine zentrale Voraussetzung wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.10 (Punktierte Kreisscheibe). Durch $f(z) := \frac{1}{z}$ wird eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert. Es sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben durch $\gamma(t) := e^{it}$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Definition 6.11. Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *zusammenhängend*, falls folgendes gilt: Für je zwei offene und disjunkte Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ mit $\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ folgt, dass entweder $\Omega_1 \cap \Omega = \emptyset$ oder $\Omega_2 \cap \Omega = \emptyset$.

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in \Omega$ einen Weg $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ existiert sodass $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$.

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

Satz 6.12. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Es sei zunächst $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende Menge. Wir fixieren $z_0 \in \Omega$ und zeigen im Folgenden, dass sich jeder Punkt aus Ω durch einen Weg mit z_0 verbinden lässt. Dazu betrachten wir die Menge

$$\Omega_1 := \{z \in \Omega : \text{ Es gibt einen Weg } \gamma\colon [a, b] \to \Omega \text{ mit } \gamma(a) = z_0 \text{ und } \gamma(b) = z\}.$$

Beachte, dass $z_0 \in \Omega_1$ und deshalb $\Omega_1 \neq \emptyset$. Wir zeigen nun, dass Ω_1 offen ist. Sei dazu $z_1 \in \Omega_1$ beliebig und $\gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ derart, dass $\gamma_1(a) = z_0$ und $\gamma_1(b) = z_1$. Weil Ω offen ist, gibt es einen Radius $r > 0$ sodass $B_r(z_1) \subset \Omega$. Für beliebige $z_2 \in B_r(z_1)$ ist die Verbindungsstrecke $\gamma_2(t) \coloneqq z_1 + t(z_2 - z_1)$ ein Weg $\gamma_2 \colon [0,1] \to \Omega$, der z_1 und z_2 verbindet. Die Verknüpfung der Wege $\gamma \coloneqq \gamma_1 \oplus \gamma_2$ definiert dann einen Weg von z_0 nach z_2 mit $\mathrm{sp}(\gamma) \subset \Omega$. Dies zeigt, dass $B_r(z_1) \subset \Omega_1$ und somit, weil z_1 beliebig gewählt war, dass Ω_1 offen ist.

Das gleiche Argument zeigt ebenfalls, dass $\Omega_2 \coloneqq \Omega \setminus \Omega_1$ offen ist. Sei dazu $z_2 \in \Omega_2$ beliebig und $r > 0$ derart, dass $B_r(z_2) \subset \Omega$. Wir zeigen, dass $B_r(z_2) \subset \Omega_2$. Angenommen, es gibt $w \in B_r(z_2) \cap \Omega_1$ und also einen Weg $\gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma_1(a) = z_0$ und $\gamma_2(b) = w$. Dann definiert die Verbindungsstrecke $\gamma_2(t) \coloneqq w + t(z_2 - w)$ wieder einen Weg $\gamma \colon [0,1] \to \Omega$, der w mit z_2 verbindet und wir erhalten mir $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ einen Weg, der z_0 und z_2 verbindet, was nicht sein kann. Also ist $B_r(z_2) \subset \Omega_2$ und deshalb Ω_2 offen. Weil Ω zusammenhängend ist und $\Omega_1 \cap \Omega \neq \emptyset$ folgt nun, dass $\Omega_2 = \Omega_2 \cap \Omega = \emptyset$. Das heißt gerade, dass Ω wegzusammenhängend ist.

Nun sei Ω als wegzusammenhängend vorausgesetzt und wir nehmen an, dass Ω nicht zusammenhängend ist. Dann finden wir offene disjunkte Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ mit $\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ und $z_1 \in \Omega_1 \cap \Omega$ und $z_2 \in \Omega_2 \cap \Omega$. Aufgrund des Wegzusammenhangs gibt es einen Weg $\gamma \colon [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Wegen der Stetigkeit von γ sind die disjunkten Mengen $I_1 \coloneqq \gamma^{-1}(\Omega_1)$ und $I_2 \coloneqq \gamma^{-1}(\Omega_2)$ relativ offen in $[a,b]$, d.h. es ist $I_1 = U_1 \cap [a,b]$ und $I_2 = U_2 \cap [a,b]$ für gewisse offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$. Da außerdem $I_1 \cup I_2 = [a,b]$ widerspricht dies dem Zusammenhang der Menge $[a,b]$. Wir führen dieses letzte Argument noch aus: Ohne Beschränkung sei $a \in I_1$. Wir setzen

$$c \coloneqq \sup\{s > a : [a,s) \subset I_1\}$$

und unterscheiden folgende zwei Fälle. Ist $c \notin I_1$, so gibt es, weil I_2 offen ist, $\varepsilon > 0$ mit $(c-\varepsilon, c] \subset I_2$. Dann ist aber $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, was nicht sein kann. Ist dagegen $c \in I_1$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $[c, c+\varepsilon) \subset I_1$, was der Definition von c widerspricht. In beiden Fällen erhalten wir also einen Widerspruch und wir haben gezeigt, dass Ω offen ist. $\square$

Mit dem Beweis des Satzes 6.12 erhält man leicht zwei zusätzliche Aussagen. Zum einen lassen sich zwei Punkte einer offenen und zusammenhängenden Menge sogar stets durch einen Polygonzug verbinden. Zum anderen ist eine offene Menge bereits dann zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte durch einen stetigen Weg verbinden lassen.

Satz 6.13. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$, so ist f konstant.*

Beweis. Es seien $z_1, z_2 \in \Omega$. Dann gibt es einen Weg $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = 0$$

für alle $t \in [a,b]$. Also ist $f(z_1) = f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) = f(z_2)$. $\square$

Korollar 6.14. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine Gebiet und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Für je zwei Stammfunktionen $F_1, F_2 \colon \Omega \to \mathbb{C}$ von f gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1(z) = F_2(z) + c$ für alle $z \in \Omega$.*

Das Korollar ist eine komplexe Version des aus der Analysis 2 bekannten Eindeutigkeitssatzes.

Bemerkung 6.15 (Eindeutigkeitssatz aus der Analysis 2)*.* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Ist $\operatorname{grad} u = 0$, so ist u konstant.

Korollar 6.16. *Sei Ω ein Gebiet und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt. Dann ist f konstant.*

Beweis. Es ist also $f = u + iv$ mit $v = 0$. Da u, v die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllen, folgt dass $\operatorname{grad} u = 0$. $\square$

7 Die Cauchysche Integralformel und der Hauptsatz

In diesem Kapitel werden wir die Cauchysche Integralformel beweisen, mit deren Hilfe sich die Auswertung einer holomorphen Funktion durch ein Kurvenintegral berechnen lässt. Diese Formel ist der Schlüssel für viele Ergebnisse der Funktionentheorie wie z.B. den Haupsatz, der besagt, dass holomorphe Funktionen und analytische Funktionen ein und dasselbe sind.

Wir führen zunächst folgende Bezeichung ein: Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f\colon \partial B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann setzen wir

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) rie^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Dies ist gerade das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ mit der durch $\gamma(t) = re^{it}$ gegebenen Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$.

Das folgende Beispiel spielt eine entscheidene Rolle in der Funktionentheorie. Im letzten Abschnitt tauchte es bereits in der Rolle eines Gegenbeispiels auf.

Beispiel 7.1. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.

(a) Es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t = 1.$$

(b) Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ist

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^m\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt}\,\mathrm{d}t = \frac{r^m}{im} e^{imt}\bigg|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

Theorem 7.2 (Cauchysche Integralformel). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner sei $\overline{B_r}(z_0) \subset \Omega$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w$$

für alle $z \in B_r(z_0)$

Beweis. Es sei $z \in B_r(z_0)$ fest und $0 < \varepsilon < r - |z - z_0|$ beliebig. Durch geschickte Zerlegung des Integrationsweges wie in Abbildung 7.1 dargestellt, erhält man aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w - \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w + \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = 0 + 0.$$

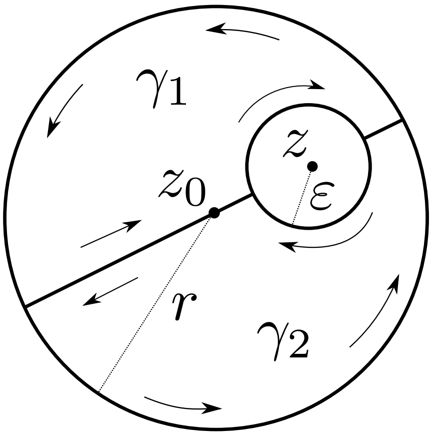


Abbildung 7.1: Zerlegung des Integrationswegs im Beweis der Cauchyschen Integralformel

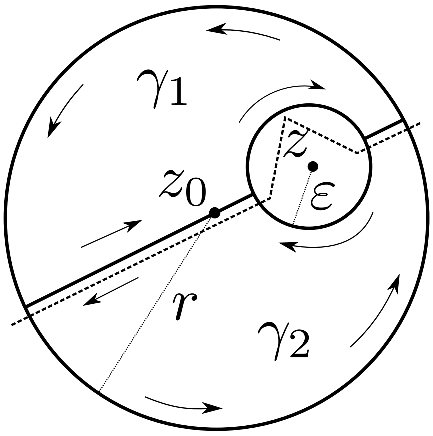


Abbildung 7.2: Sternförmige Umrandung des Integrationswegs γ_1

Um den Integralsatz 6.9 tatsächlich auf die geschlossenen Wege γ_1 und γ_2 anwenden zu können, müssen wir uns zunächst klar machen, dass diese jeweils in sternförmigen Gebieten verlaufen auf denen der Integrand holomorph ist. Abbildung 7.2 zeigt exemplarisch die untere Begrenzung eines solchen Gebiets, das $\operatorname{sp}(\gamma_1)$ enthält.

Es ist also

$$f_\varepsilon(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Weil f im Punkt z komplex-differenzierbar ist, gibt es $M \geq 0$ derart, dass

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leq M$$

für alle $w \in \Omega \setminus \{z\}$. Aus dem Fundamentalbeispiel 7.1 sehen wir, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Damit folgt mit der Fundamentalabschätzung, dass

$$|f_\varepsilon(z) - f(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right| \leq \frac{M}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\varepsilon = M\varepsilon.$$

Dies zeigt, dass

$$f(z) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w. \qquad \square$$

Die Cauchysche Integralformel zeigt insbesondere, dass die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren eines Kreises durch ihre Werte auf dem Rand desselben eindeutig bestimmt sind. Sie erlaubt uns auch, die Funktion in eine Potenzreihe zu entwickeln. Dazu benutzen wir das folgende Lemma über das Vertauschen von Integral und Summe bei normaler Konvergenz.

Lemma 7.3. *Es sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein Weg und* $f_n\colon \operatorname{sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ *eine Folge stetiger Funktionen. Es seien ferner* $q_n \geq 0$ *gegeben mit* $\sum_{n=0}^{\infty} q_n < \infty$ *derart, dass* $|f_n(z)| \leq q_n$ *für alle* $z \in \operatorname{sp}(\gamma)$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$*. Dann definiert*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{7.1}$$

eine stetige Funktion $f\colon \operatorname{sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ *und*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis. Da die Reihe normal konvergiert, ist durch (7.1) eine stetige Funktion $f\colon \operatorname{sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ definiert. Aus der Fundamentalabschätzung erhält man nun für alle $N \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{n=0}^{N} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_\gamma \left(f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_k(z) \right) \mathrm{d}z \right| \\
&= \left| \int_\gamma \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z \right| \\
&\leq L(\gamma) \cdot \sup_{z \in \operatorname{sp}(\gamma)} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| \\
&\leq L(\gamma) \sum_{n=N+1}^{\infty} q_n.
\end{aligned}$$

Weil die rechte Seite für $N \to \infty$ nach 0 konvergiert, folgt die Behauptung. □

Das folgende Resultat ist eine Konsequenz aus der Cauchyschen Integralformel.

Satz 7.4 (Hauptsatz)**.** *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $\overline{B_r}(z_0) \subset \Omega$*. Ferner sei* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann ist*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{7.2}$$

für alle $z \in \Omega$ *mit* $|z - z_0| < r$*, wobei*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \tag{7.3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Die Reihe (7.2) hat also einen Konvergenzradius $R \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Der Hauptsatz zeigt insbesondere, dass jede holomorphe analytisch ist. Analytisch und holomorph sind also äquivalente Eigenschaften.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $z_0 = 0$. Aus der Cauchyschen Integralformel erhalten wir, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = r} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w$$

für alle $z \in B_r(0)$. Nun sei $0 < \varrho < 1$. Für $|z| \leq \varrho$ gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n},$$

da $|z/w| \leq \varrho/r < 1$. Lemma 7.3 erlaubt uns nun, Integration und Summation zu vertauschen und wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Koeffizienten a_n entsprechend (7.3).

Nun sei $z_0 \in \Omega$ beliebig. Wir setzen $g(z) \coloneqq f(z+z_0)$ und

$$a_n \coloneqq \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta+z_0)}{\zeta^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w$$

Aus der Betrachtung des ersten Falls folgt nun, dass $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $|z| < r$ und also

$$f(z) = g(z-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

für alle $|z - z_0| < r$. □

Korollar 7.5. *Eine Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist.*

Bemerkenswert ist, dass die Funktion in jedem Punkt in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, die innerhalb der größten Kreisscheibe konvergiert, die noch in dem Gebiet Ω liegt. Wir schauen uns zum Schluss ein konkretes Beispiel an.

Beispiel 7.6. Durch $f(z) \coloneqq \frac{1}{1+z^2}$ ist eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ definiert. Die Potenzreihe von f im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ ist

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

für $|z| < 1$, wie man leicht mit Hilfe der geometrischen Reihe sieht. Der Konvergenzradius ist 1. Tatsächlich sind i und $-i$ auf dem Konvergenzkreis singuläre Punkte. Wegen $\lim_{z \to \pm i} |f(z)| = \infty$ kann f nicht holomorph in i oder $-i$ fortgesetzt werden.

Wir notieren noch ein weiteres Korollar, das aus dem Hauptsatz, Satz 7.4, und Theorem 4.8 folgt.

Korollar 7.7. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist auch f' holomorph. Insbesondere ist f beliebig oft komplex-differenzierbar.*

8 Der Satz von Liouville

Die Cauchysche Integralformel ist an sich schon erstaunlich. Sie hat aber ebenfalls verblüffende Konsequenzen. In diesem und dem nächsten Abschnitt beschreiben wir zwei besonders interessante Phänomene.

Als erstes wollen wir die Ableitungen einer holomorphen Funktion auch durch eine Version der Cauchyschen Integralformel ausdrücken.

Satz 8.1 (Cauchysche Integralformel für Ableitungen)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner sei $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann ist*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_0 - w| = r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \,\mathrm{d}w. \tag{8.1}$$

Beweis. Für $n = 0$ ist dies gerade die Aussage von Theorem 7.2, also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 + re^{it} - z)} \,\mathrm{d}t.$$

Nach Satz 5.5 dürfen wir unter dem Integral ableiten und erhalten (8.1) für $n = 1$. Das macht man so für $n = 2, 3, \ldots$ oder korrekt durch vollständige Induktion (machen Sie's korrekt!). ☐

Definition 8.2. Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *ganze Funktion*.

Aus der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen erhalten wir folgenden erstaunlichen Satz.

Satz 8.3 (J. Liouville 1847)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 8.1 für $n = 1$ und $z_0 = z$ gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \,\mathrm{d}w$$

für jedes $r > 0$. Nach der Fundamentalabschätzung ist damit

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi i} \frac{c}{r^2} 2\pi r = \frac{c}{r}$$

wobei $c \ge |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $r > 0$ beliebig ist, ist $f'(z) = 0$. Weil $z \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt war, erhalten wir aus Satz 6.13, dass f konstant ist. ☐

Wir haben bereits gesehen, dass sin und cos ganze Funktionen sind. Auf $\mathbb{R}$ sind sie beschränkt, nicht aber auf $\mathbb{C}$. Das folgt aus dem Satz von Liouville; zeigen Sie es direkt!

Aus dem Satz von Liouville kann man außerdem sehr leicht den Hauptsatz der Algebra herleiten. Das wollen wir im Folgenden tun.

Satz 8.4 (Hauptsatz der Algebra). *Jedes nicht-kontante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir ein normiertes Polynom, es sei also $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ für $n \geq 1$. Wir nehmen an, dass $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)}$$

eine ganze Funktion.

Es ist

$$|p(z)| = |z|^n |1 - g(z)| \geq |z|^n (1 - |g(z)|)$$

mit

$$g(z) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}.$$

Wir wählen $R > 0$ derart, dass $|g(z)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Also ist $|p(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n$ auf $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$ und somit $|f(z)| \leq \frac{2}{R^n}$ auf $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$. Da f auf $\overline{B_R}(0)$ als stetige Funktion ebenfalls beschränkt ist, ist f eine beschränkte ganze Funktion und somit nach Satz 8.3 konstant. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass p nicht konstant ist. □

Konstruiert wurden die komplexen Zahlen gerade so, dass das Polynom $1 + z^2$ eine Nullstelle hat. Wir haben jedoch viel mehr erreicht, sogar folgende nützliche Faktorisierung, in der genau n Nullstellen (mit eventueller Wiederholung) vorkommen.

Korollar 8.5. *Es sei* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ *ein normalisiertes komplexes Polynom vom Grad* $n \geq 1$. *Dann gibt es* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *sodass*

$$p(z) = (z - z_1) \cdot \cdots \cdot (z - z_n)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bevor wir das Korollar beweisen, wenden wir den Hauptsatz auf eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an. Auf diese Weise erhalten wir, dass für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ für $n = 0, 1, \ldots$. Die Funktion f ist genau dann ein Polynom vom Grad m, wenn $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ und $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k > m$.

Beweis. Wir beweisen nun Korollar 8.5 durch Induktion. Für $n = 1$ ist $p(z) = a_0 + z$ gerade von der gewünschten Form für $z_1 = -a_0$. Nun gelte die Behauptung für ein $n \geq 1$ und es sei p ein normalisiertes Polynom vom Grad $n + 1$. Nach dem Hauptsatz hat p eine Nullstelle z_{n+1}. Wir entwickeln nun p in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_{n+1} und erhalten

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (z - z_{n+1})^k$$

mit $a_{n+1} = 1$. Da $p(z_{n+1}) = 0$ ist $a_0 = 0$. Also ist

$$p(z) = (z - z_{n+1}) q(z)$$

für ein Polynom q vom Grad n. Weil p normalisiert ist, ist auch q normalisiert und deshalb, nach Induktionsvoraussetzung, $q = (z - z_1) \cdot \cdots \cdot (z - z_n)$ für gewisse $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Also hat p ebenfalls die gewünschte Darstellung. □

9 Punktweiser Grenzwert holomorpher Funktionen

In diesem und dem nächsten Abschnitt wollen wir weitere interessante Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel ziehen. Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ so ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w.$$

Wir haben bereits gesehen, dass diese Formel es erlaubt, f in eine Potenzreihe zu entwickeln. Wir gehen jetzt umgekehrt vor und definieren eine Funktion über die Cauchysche Integralformel. Es sei $g\colon \partial B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir setzen

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{g(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w \tag{9.1}$$

für alle $z \in B_r(z_0)$. Dieser Ausdruck hat einen Sinn, falls g lediglich als integrierbar vorausgesetzt wird. Das soll natürlich bedeuten, dass die Abbildung

$$t \mapsto g(z_0 + re^{it})$$

auf $[0, 2\pi]$ Lebesgue-integrierbar ist. Dann erhalten wir mit dem Beweis von Satz 7.4 folgende Aussage.

Lemma 9.1. *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $g\colon \partial B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann definiert* (9.1) *eine holomorphe Funktion $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$, die durch die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

gegeben ist, wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_0-w|=r} \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w.$$

Beweis. Wir wiederholen die Argumente um nachzuprüfen, dass die Integrierbarkeit reicht. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $z_0 = 0$. Es ist also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it})}{re^{it} - z} \cdot rie^{it} \,\mathrm{d}t.$$

Sei nun $0 < \varrho < r$, $|z| \leq \varrho$. Dann ist $\left|\frac{z}{re^{it}}\right| \leq \frac{\varrho}{r} < 1$. Also ist

$$\frac{re^{it}}{re^{it} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{re^{it}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n} e^{-int}$$

gleichmäßig in $t \in [0, 2\pi]$. Damit ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it})}{r^n e^{int}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w. \qquad \square$$

Nun erinnern wir uns an den Satz von Lebesgue aus der Maßtheorie. Hier ist ein Spezialfall.

Satz 9.2 (Lebesgue)**.** *Es seien $u_n \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, $|u_n(t)| \leq c$ für alle $t \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$. Es existiere*

$$u(t) := \lim_{n\to\infty} u_n(t)$$

für alle $t \in [a, b]$. Dann ist $u \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und

$$\int_a^b u(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(t) \,\mathrm{d}t.$$

Benutzen wollen wir die vorhergehenden Aussagen, um den folgenden bemerkenswerten Satz über den punktweisen Grenzwert holomorpher Funktionen zu beweisen.

Satz 9.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe $c \geq 0$ derart, dass $|f_n(z)| \leq c$ für alle $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Falls $f(z) := \lim f_n(z)$ für alle $z \in \Omega$ existiert, so ist $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph.*

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Wir zeigen, dass f auf $B_r(z_0)$ holomorph ist. Es ist

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f_n(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w.$$

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue sieht man, dass $f \mid_{\partial B_r(z_0)}$ integrierbar ist und nach Grenzübergang $n \to \infty$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w.$$

Lemma 9.1 impliziert die Holomorphie von f. $\square$

Dieser Satz ist insofern bemerkenswert, dass der punktweise Grenzwert beliebig oft differenzierbarer Funktionen im Allgemeinen nicht stetig ist auch wenn die Funktionen gleichmäßig beschränkt sind. Zeichnen Sie ein Beispiel!

Beispiel 9.4 (Laplacetransformation). Es sei $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Man definiert für $z \in \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ die Funktion

$$g(z) := \int_0^{\infty} e^{-tz} f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Da $|e^{-tz}| = |e^{-tx} e^{-tiy}| = |e^{-tx}|$ für $z = x + iy$, ist

$$\int_0^{\infty} |e^{-tz} f(t)| \,\mathrm{d}t \leq c \int_0^{\infty} e^{-tx} \,\mathrm{d}t = \frac{c}{x}$$

für $x > 0$. Damit existiert das Integral als uneigentliches Riemannintegral.

Sei nun
$$g_n(z) \coloneqq \int_0^n e^{-tz} f(t)\, \mathrm{d}t.$$
Nach dem Satz über das komplexe Differenzieren unter dem Integral, Satz 5.5, ist $g_n \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ holomorph. Da $g(z) = \lim g_n(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}_+$, ist auch $g \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ holomorph.

10 Der Identitätssatz

In dieser und der nächsten Vorlesung besprechen wir interessante, zum Teil auch verblüffende, Folgerungen aus dem Hauptsatz. Der folgende Identitätssatz ist wichtig und hat zahlreiche Anwendungen. Wir beginnen mit einem einfachen Hilfssatz und wiederholen dazu die Begriffe *relativ offen* und *relativ abgeschlossen.*

Definition 10.1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Menge. Dann heißt eine Teilmenge $D \subset \Omega$ *relativ offen (abgeschlossen) in* Ω, falls es eine offene (abgeschlossene) Menge $M \subset \mathbb{C}$ gibt, sodass $D = M \cap \Omega$.

Alle relativ offenen Mengen in Ω bilden die sogenannte *Spurtopologie* auf Ω. Man überlegt sich leicht, dass eine Menge $D \subset \Omega$ genau dann relativ abgeschlossen in Ω ist, wenn für jede konvergente Folge $(z_n) \subset D$ mit $z := \lim z_n \in \Omega$ bereits $z \in D$ gilt.

Lemma 10.2. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* $\emptyset \neq D \subset \Omega$ *offen und* relativ abgeschlossen *in* Ω*. Dann ist* $D = \Omega$*.*

Beweis. Es sei $A \subset \Omega$ abgeschlossen, sodass $D = \Omega \cap A$. Dann ist $\Omega \setminus D = \Omega \setminus A$ offen. Aus der Definition des Zusammenhangs folgt nun, dass $\Omega \setminus (\Omega \setminus D) = \emptyset$, also $D = \Omega$. □

Theorem 10.3 (Identitätssatz)**.** *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph. Es gebe eine konvergente Folge* $(z_k) \subset \Omega$ *mit* $\lim z_k = z_0 \in \Omega$ *derart, dass* $z_k \neq z_0$ *und* $f(z_k) = g(z_k)$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Dann ist* $f(z) = g(z)$ *für alle* $z \in \Omega$*.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $g = 0$, ansonsten erstzen wir f durch $f - g$. Es ist also $f(z_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Es sei $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Wir zeigen zunächst, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Nach dem Hauptsatz ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für geeignete $a_n \in \mathbb{C}$ und alle $z \in B_r(z_0)$. Da $\lim z_k = z_0$ ist, ist wegen der Stetigkeit von f, $f(z_0) = 0$. Somit ist $a_0 = 0$. Es folgt

$$f_1(z) := \frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n$$

für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Aus $f_1(z_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt $a_1 = \lim f_1(z_k) = 0$. Betrachtet man nun $f_2(z) := f_1(z)/(z - z_0)$ sieht man genauso, dass $a_2 = 0$. Sukzessive erhält man, dass $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also verschwindet f auf der Menge $B_r(z_0)$ wie behauptet.

Nun betrachten wir die Menge

$$D := \{z \in \Omega : f(z) = 0 \text{ in einer Umgebung von z}\}.$$

Dann ist D eine offene Menge und aus der vorherigen Überlegung folgt, dass $z_0 \in D$. Andererseits ist D auch relativ abgeschlossen in Ω. Um dies zu sehen, sei $(z_k) \subset D$ eine konvergente Folge mit $z_0 := \lim z_k \in \Omega$. Wiederum aus der Vorüberlegung folgt nun, dass f auf einer Umgebung von z_0 verschwindet, weshalb $z_0 \in D$. Also ist D relativ abgeschlossen und nach obigem Lemma ist $D = \Omega$. □

Ein solcher Identitätssatz gilt nicht für reell-differenzierbare Funktionen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 10.4 (Cauchy 1823). Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist f beliebig oft differenzierbar.

Als Illustration der vielen möglichen Anwendungen des Identitätssatzes wollen wir das Exponentialgesetzt für die komplexe Exponentialfunktion beweisen. Eine Möglichkeit ist, es mit Hilfe des Cauchyprodukts zu zeigen. Der folgende Beweis benutzt stattdessen ein Argument aus der Theorie der Differenzialgleichungen und den Identitätssatz.

Beispiel 10.5 (Exponentialgesetzt). Wir wissen, dass die Funktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und $\exp'(z) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir wollen nun zeigen, dass $e^{z+w} = e^z e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ wobei $e^z := \exp(z)$.

Beweis. Es seien zunächst $a, b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $u(x) := \exp(a + x)$. Dann ist $u'(x) = u(x)$ und $u(0) = \exp(a)$. Sei nun $v(x) = e^{-x}u(x)$. Dann ist $v'(x) = -e^{-x}u(x) + e^{-x}u'(x) = 0$. Also ist $v(x) = v(0) = \exp(a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $u(x) = e^x v(x) = e^x e^a$. Wir haben gezeigt, dass $e^{a+x} = e^a e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun sei $x \in \mathbb{R}$ und wir zeigen, dass $e^{x+z} = e^x e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Funktionen $f(x) := e^{x+z}$ und $g(z) = e^x e^z$ sind holomorph und stimmen auf der reellen Achse überein. Aus dem Identitätssatz folgt, dass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Nun sei $z \in \mathbb{C}$. Wiederum sind die Funktionen $f(w) = e^{z+w}$ und $g(w) = e^z e^w$ holomorph und stimmen für alle $w \in \mathbb{R}$ überein. Nach dem Identitätssatz ist $g(w) = f(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$, was den Beweis des Exponentialgesetztes abschließt. □

Auf gleiche Weise übertragen sich die Additionstheoreme für sin und cos aus der reellen Analysis.

Beispiel 10.6. Es gilt

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

und

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

11 Das Maximumprinzip

Der folgende Satz ist eine Folgerung aus dem Hauptsatz.

Satz 11.1 (Striktes Maximumprinzip)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in \overline{B_r(z_0)}$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Wir können f auf $\overline{B_r(0)}$ also als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Konvergenzradius $R > r$ und Koeffizienten $(a_n) \subset C$. Nach Voraussetzung ist

$$|a_0|^2 = |f(0)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(0)|^2 \,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Wir berechnen

$$|f(re^{it})|^2 = f(re^{it})\overline{f(e^{it})} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}\right) \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}\right)} = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)t}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz in $t \in [0, 2\pi]$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} |a_0|^2 &\geq \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)t} \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \end{aligned}$$

Somit ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f = a_0$ auf $B_r(z_0)$. Der Identitätssatz impliziert, dass $f = a_0$ auf Ω. □

Korollar 11.2 (Maximumprinzip)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und auf Ω holomorph. Dann gilt*

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Beweis. Weil $\partial\Omega$ und $\overline{\Omega}$ kompakt sind und $|f|$ stetig ist, existieren die beiden Maxima aus der Aussage des Satzes. Wir nehmen an, das $\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)| > \max_{w\in\partial\Omega}|f(w)|$. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum im Inneren von Ω an, d.h. es gibt $z_0 \in \Omega$ sodass $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in \overline{\Omega}$. Aus dem strikten Maximumprinzip folgt nun, dass $|f|$ konstant ist im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Der Beweis zeigt sogar folgendes

Korollar 11.3. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf Ω. Ist f nicht konstant, so ist*

$$|f(z)| < \max_{w\in\partial\Omega}|f(w)|$$

für alle $z \in \Omega$.

Beweis. Wir wissen aus Korollar 11.2 dass $|f(z)| \leq \max_{w\in\partial\Omega}|f(w)|$ für alle $z \in \Omega$. Gäbe es ein $z_0 \in \Omega$ mit $|f(z_0)| = \max_{w\in\partial\Omega}|f(w)|$ so wäre $|f(z_0)| = \max_{z\in\Omega}|f(z)|$ und damit wäre f konstant nach Satz 11.1. □

12 Der Satz von Morera

Als weiter Folgerung aus dem Hauptsatz kommen wir auf unsere ursprüngliche Konstruktion einer Stammfunktion in einem Sterngebiet zurück. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $[z_1, z_2] \subset \mathbb{C}$ ein Segment, so definiert $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ einen Weg mit $\mathrm{sp}(\gamma) = [z_1, z_2]$. Dieser Weg ist eine Parametrisierung von $[z_1, z_2]$ mit Anfangswert z_1 und Endwert z_2. Wir setzen

$$\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1)) \cdot (z_2 - z_1)\,\mathrm{d}t.$$

Sei nun Ω sternförmig, z.B. bzgl. 0. Dann hatten wir gesehen dass

$$F(z) := \int_{[0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^1 f(tz) \cdot z\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f definiert. Der Beweis bestand durch einfaches Differenzieren unter dem Integral. Als Forderung haben wir den Cauchyschen Integralsatz und die Analytizität von f erhalten. Im folgenden Satz setzen wir lediglich voraus, dass f stetig ist und fordern die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes für Dreiecke. Daraus schließen wir, dass f holomorph ist.

Satz 12.1 (Morera)**.** *Sei Ω offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Es gelte*

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jedes Dreieck D mit $\overline{D} \subset \mathbb{C}$.

Dann ist f holomorph.

Hat das Dreieck D die Eckpunkte z_1, z_2, z_3 so ist

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[z_2,z_3]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[z_3,z_1]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis. Sei $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$. Wir zeigen, dass f auf $B_r(z_0)$ holomorph ist. Sei o.B.d.A. $z_0 = 0$. Setze

$$F(z) = \int_{[0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^1 f(tz) \cdot z\,\mathrm{d}t.$$

Dann ist nach Voraussetzung

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^1 f(z + th) \cdot h\,\mathrm{d}t,$$

also folgt
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t.$$

Da aber $\lim_{h\to 0}\int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t = f(z)$ (beweisen sie das!), ist $F'(z) = f(z)$. Damit ist F holomorph mit $f = F'$. Aus Korollar 7.7 folgt, dass auch f holomorph ist. $\square$

13 Elementargebiete

Der folgende Begriff ist der Hauptgegenstand dieses Abschnitts.

Definition. Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *Elementargebiet*, falls jede holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt.

Wir hatten gesehen, dass sternförmige offene Mengen Elementargebiete sind. Auf der anderen Seite ist $\Omega \setminus \{z_0\}$ kein Elementargebiet, wenn Ω ein Gebiet mit $z_0 \in \Omega$

Anschaulich sind Elementargebiete gerade die Gebiete, die keine Löcher haben. Wir werden diese Aussage im Abschnitt 17 präzise fassen.

Satz 13.1. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Folgende Aussage sind äquivalent:*

1. *Ω ist ein Elementargebiet.*
2. *$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg in Ω und jede holomorphe Funktion f.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Identisch mit dem Beweis des Cauchyschen Integralsatzes (Satz 6.9).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $z_0 \in \Omega$. Wir setzen

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w,$$

wobei γ ein Weg in Ω ist mit Anfangswert z_0 und Endwert z. Die Voraussetzung besagt gerade, dass diese Definition von der Wahl des Weges unabhängig ist. Denn sind γ_1, γ_2 zwei solche Wege so ist

$$0 = \int_{\gamma \oplus \gamma_2^-} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_1} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\gamma_2} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Sei nun $z \in \Omega$. Wähle $r > 0$ so, dass $\overline{B}_r(z) \subset \Omega$. Für $|h| < r$ ist

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &= \int_0^1 f(z+th) \cdot h\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = \lim_{h \to 0} \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t = f(z).$$

Die Funktion F ist also eine Stammfunktion von f. □

In der Situation des Satzes von Morera hatten wir nur lokale Stammfunktionen angegeben, und zwar in jeder Kreisscheibe, die in Ω liegt. Auf Elementargebieten finden wir zu jeder holomorphen Funktion eine Stammfunktion auf ganz Ω.

Als Anwendung beweisen wir die Existenz des Logarithmus auf Elementargebieten, d.h. einer Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Satz 13.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, so gibt es eine holomorphe Funktion $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derart, dass*

$$f(z) = \exp(h(z)) \text{ für alle } z \in \Omega \tag{13.1}$$

gilt. Die Funktion ist eindeutig bis auf eine additive Konstante $2\pi i m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Eindeutigkeit: Sei $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph sodass (13.1) gilt. Dann ist

$$f'(z) = h'(z)\exp(h(z)) = h'(z)f(z).$$

Damit ist h eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$. Ist g eine weitere, so gibt es $c \in \mathbb{C}$ sodass $g = h + c$. Damit ist $\exp(h(z)) = f(z) = \exp(h(z) + c) = \exp(h(z))e^c = f(z)e^c$ für alle $z \in \Omega$. Es ist also $e^c = 1$, d.h. $c = 2\pi i m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Existenz: Es sei $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$. Setze $G(z) = \frac{\exp(g(z))}{f(z)}$. Dann ist

$$G'(z) = \frac{g'(z)\exp(g(z))f(z)\exp(g(z))f'(z)}{f(z)^2} = 0.$$

Also gibt es $c_1 \in \mathbb{C}$ sodass $G(z) = c_1$ für alle $z \in \Omega$. Wähle $c \in \mathbb{C}$ so, dass $c_1 = \exp(c)$. Damit ist $\exp(g(z)) = f(z)\exp(c)$, also definiert $h(z) = g(z) - c$ einen Logarithmus, d.h. eine Funktion die (13.1) erfüllt. □

Man nennt die Funktion h aus obigem Satz einen *analytischen Zweig* des Logarithmus von f.

Beispiel 13.3. Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Es gibt genau eine holomorphe Funktion $\log\colon \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit $\exp(\log(z)) = z$ für alle $\mathbb{C}_-$ und $\log 1 = 0$. Es gilt

$$\log(z) = \log|z| + i \arg z \tag{13.2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}_-$.

Beweis. Die Menge C_- ist sternförmig bzgl. $a = 1$. Sei $f(z) = z$. Damit ist $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z}$. Die Funktion

$$\log(z) := \int_1^z \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w$$

ist eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$ mit $\log 1 = 0$. Um (13.2) zu zeigen, setze

$$g(z) = \log|z| + i \arg z = u + iv$$

mit $u(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ und $v(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$.

Benutze die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, um zu zeigen dass g holomorph ist. Da $e^{g(z)} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}_-$ ist $1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^{g(z)} = g'(z)e^{g(z)} = g'(z) \cdot z$. Also ist $g'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}_-$. Da $g(1) = 0$, folgt (13.2). □

Satz 13.4 (n-te Wurzel). *Sei Ω ein Elementargebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derart, dass*

$$g(z)^n = f(z).$$

Beweis. Sei $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass $f = \exp \circ h$. Setze $g(z) := \exp \frac{h(z)}{n}$. □

Schließlich sei bemerkt, wie man sich aus gegebenen Elementargebieten neue Elementargebiete konstruieren kann.

Satz 13.5.
1. *Seien Ω_1, Ω_2 Elementargebiete. Ist $\Omega_1 \cap \Omega_2$ zusammenhängend, so ist $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ein Elementargebiet.*
2. *Seien Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, Elementargebiete mit $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ ein Elementargebiet.*

Beweis. Übung. □

Nun kommen wir auf eine Fragestellung aus Abschnitt 3 zurück. Dort hatten wir gesehen, dass der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch ist. Nun zeigen wir, dass auf Elementargebieten alle harmonischen Funktionen auf diese Weise gegeben sind.

Satz 13.6. *Sei Ω ein Elementargebiet und $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gibt es eine Funktion $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ derart, dass $h + iv$ holomorph ist.*

Die Funktion v ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Man nennt sie die zu h konjugierte Funktion.

Beweis. Sei $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $h_{xx} + h_{yy} = 0$ auf Ω. Definiere $f := h_x - ih_y$, d.h. $f = u + iv$ mit $u = h_x$, v$= -h_y$.

Dann ist $u_x = h_{xx} = -h_{yy} = v_y$ und $u_y = h_{xy} = h_{yx} = -v_x$. Damit erfüllen u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und f ist holomorph. Da Ω ein Elementargebiet ist, besitzt f eine Stammfunktion $F = +iV$. Damit ist

$$h_x - ih_y = F' = U_x + iV_x.$$

Folglich ist $h_x = U_x$ und $h_y = -V_x = V_y$ (Cauchy-Riemann). Wir haben gezeigt, dass $\operatorname{grad} h = \operatorname{grad} U$. Da Ω zusammenhängend ist, gibt es nach Bemerkung 6.15 eine Konstante c derart, dass $h = U + c$. Die Funktion $h + iV = (U + c) + iV$ ist holomorph mit Realteil h.

Die Eindeutigkeit sieht man so: Sind $h + iv_1$ und $h + iv_2$ holomorph, so ist $i(v_1 - v_2)$, also auch $v_1 - v_2$ holomorph. Aus Korollar 6.16 folgt, dass $v_1 - v_2$ konstant ist. □

Beispiel 13.7. Die Funktion

$$h(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ harmonisch, aber nicht Realteil einer holomorphen Funktion.

Beweis. Auf $C_=\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq 0\}$ ist $h = \operatorname{Re} f$, wobei $f(z) = \log |z| + i \arg z$, siehe Beispiel 13.3. Die Funktion f hat keine stetige Fortsetzung in x, wenn $x < 0$, da $\lim_{y\searrow 0} f(x + iy) - \lim_{y\nearrow 0} f(x + iy) = 2\pi$. □

Man kann zeigen, dass Ω genau dann ein Elementargebiet ist, wenn jede harmonische Funktion auf Ω der Realteil einer holomorphen Funktion ist. Auf [2, Seite 245] werden 13 Äquivalenzrelationen gegeben, die Elementargebiete beschreiben. Die erstaunlichste ist der Riemannsche Abbildungssatz, den wir in Abschnitt 19 erläutern.

14 Laurentreihen

Wir studieren in diesem Abschnitt holomorphe Funktionen, die in einer punktierten Kreisscheibe, oder allgemeiner, in einem Ring definiert sind.

Satz 14.1 (Laurent)**.** *Sei*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}$$

ein Ring mit $0 \leq r < R \leq \infty$.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann gibt es eindeutig bestimmte, holomorphe Funktionen* $g \colon B_R(0) \to \mathbb{C}$, $h \colon B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ *mit* $h(0) = 0$ *derart, dass*

$$f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$$

gilt für alle $z \in \Omega$.

Beweis der Eindeutigkeit. Es sei

$$g(z) + h(\frac{1}{z}) = 0, \qquad (z \in \Omega)$$

wobei $g \colon B_R(0) \to \mathbb{C}$, $h \colon B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph sind und $h(0) = 0$. Zu zeigen ist: $g = h = 0$.

Setze $k(z) = h(\frac{1}{z})$ für $|z| > r$. Dann ist $k(z) = -g(z)$ für $z \in B_R(0) \setminus \overline{B}_r(0)$. Damit definiert

$$F(z) := \begin{cases} k(z), \text{ für } |z| > r \\ -g(z), \text{ für } |z| \leq r \end{cases}$$

eine ganze Funktion F. Da aber $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$ gilt, ist nach dem Satz von Liouville F identisch 0. □

Für die Existenz benötigen wir ein Lemma.

Lemma 14.2. *Sei* $0 \leq r < R \leq \infty$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}$ *und* $G \colon \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph. Sei* $r < r_1 < r_2 < R$. *Dann ist*

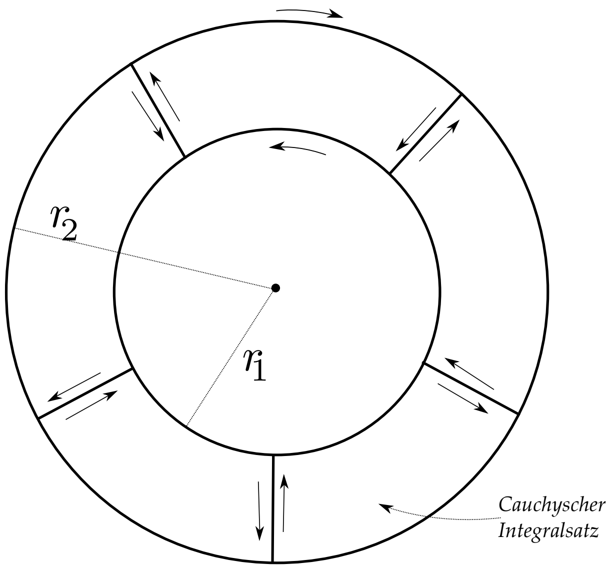
$$\int_{|z|=r_1} G(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=r_2} G(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis. Sei $\gamma_k = r_k e^{it}$, $k = 1, 2$, $t \in [0, 2\pi]$. Wir wollen zeigen, dass $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2^-} G(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Wir fügen Segmente ein, sodass

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2^-} G(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \int_{k_j} G(z)\,\mathrm{d}z$$

gilt, wobei k_j geschlossene Wegen in einem sternförmigen Gebiet sind, gemäß folgender Zeichnung:



Nach dem Cauchyschen Integralsatz sind damit je $\int_{k_j} G(z)\,\mathrm{d}z = 0$ und die Behauptung folgt. □

Beweis der Existenz. Sei $z \in \Omega$. Setze

$$G(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}, & \text{für } w \neq z \\ f'(z), & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, lässt sich $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z)^n$ entwickeln für $|w - z| \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$ hinreichend klein, $a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$. Es ist $a_0 = f(z)$. Also hat

$$w \mapsto \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - z)^{n-1}$$

eine holomorphe Fortsetzung in $B_\epsilon(z)$ und somit in Ω. Ferner ist $a_1 = f'(z)$ die Fortsetzung in z. Damit ist G holomorph. Nach dem Lemma 14.2 ist

$$\int_{|w|=r_1} G(w)\,\mathrm{d}w = \int_{|w|=r_2} G(w)\,\mathrm{d}w.$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(z)}{w - z}\,\mathrm{d}w \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(z)}{w - z}\,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{1}{w - z}\,\mathrm{d}w = 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{1}{w - z}\,\mathrm{d}w = 1. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w =: g(z) + k(z).$$

Es folgt aus unserem Satz über das komplexe Differenzieren unter dem Integral (Satz 5.5), dass g auf $B_{r_2}(0)$ und k auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{r_1}(0)$ holomorph sind. Ferner ist $\lim_{|z|\to\infty} k(z) = 0$. Definiere $h\colon B_{\frac{1}{r_1}}(0) \to \mathbb{C}$ durch $h(z) = k(\frac{1}{z})$. Dann ist h holomorph und $h(0) = 0$. Da r_1, r_2 beliebig waren erhalten wir holomorphe Funktionen $g\colon B_R(0) \to \mathbb{C}$ und $h\colon B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ sodass $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$ für alle $z \in \Omega$. $\square$

Korollar 14.3 (Laurentreihe)**.** *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}$ der Ring mit Innenradius $r \geq 0$ und Außenradius $\infty \geq R > r$ ist. Dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, sodass*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \tag{14.1}$$

für alle $z \in \Omega$ gilt. Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem kleineren Ring $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$, $r < r_1 < r_2 < R$. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w \tag{14.2}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $r < \varrho < R$.

Beweis. Es gibt $a_n \in \mathbb{C}$, sodass $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\geq R$ und a_{-n}, sodass $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ mit Konvergenzradius $\geq \frac{1}{r}$. Damit konvergieren die Reihen gleichmäßig auf $\overline{B}_{r_2}(0)$ bzw. $\overline{B}_{\frac{1}{r_1}}(0)$. Es ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Sei $r < \varrho < R$. Da die Reihe auf $\{w \in \mathbb{C} : \ |w| = \varrho\}$ gleichmäßig konvergiert, dürfen wir Summe und Integral vertauschen. Es ist also für $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m w^{m-n-1} \,\mathrm{d}w \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} w^{m-n-1} \,\mathrm{d}w = a_n, \end{aligned}$$

da $\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} w^{m-n-1} \,\mathrm{d}w = 1$, wenn $m = n$, und $\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} w^{m-n-1} \,\mathrm{d}w = 0$ sonst. $\square$

Bemerkung 14.4 (zur Definition der Summe). Es ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ für $r < |z| < R$.

Man nennt (14.1) die *Laurentreihe* von f. Formel (14.2) zeigt insbesondere, dass die Koeffizienten der Laurentreihe von f eindeutig sind.

Genauso kann man die Laurententwicklung in anderen Punkten betrachten:

Korollar 14.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$, sodass*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für $0 < |z - z_0| < R$, wobei $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Beweis. Wende Korollar 14.3 auf $g(z) = f(z - z_0)$ an. □

Wir betrachten die Laurententwicklung in einem Beispiel.

Beispiel 14.6. Sei $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 4z + 3} = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{z-3}$.

- Sei $|z| < 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{1}{3^{n+1}})z^n \qquad \text{(Potenzreihenentwicklung)} \end{aligned}$$

- Sei $3 > |z| > 1$. Für $|z| > 1$ ist $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$.

  Für $|z| < 3$ ist $\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$.

  Also gilt
$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

- Sei $|z| > 3$. Dann ist $\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}$.

  Damit ist
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(3^{n-1} - 1)z^{-n}.$$

15 Singularitäten

In diesem Kapitel untersuchen wir Singularitäten. Dazu geben wir uns eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ vor zusammen mit einem Punkt $z_0 \in \Omega$. Ferner sei eine holomorphe Funktion

$$f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$$

gegeben.

Wir wissen, dass f durch die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{15.1}$$

gegeben ist, die in der punktierten Kreisscheibe $\dot{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ konvergiert, wobei $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ der Abstand von z_0 zum Rand von Ω ist.

Als erstes betrachten wir den Fall, dass z_0 eine „falsche Singularität" ist.

Satz 15.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Es gebe $c \geq 0$, $0 < \delta < R$ sodass*

$$|f(z)| < c \text{ für } 0 < |z - z_0| \leq \delta.$$

Dann hat f eine eindeutige, holomorphe Fortsetzung auf Ω.

Beweis. Es ist für $0 < \epsilon \leq \delta$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w.$$

Damit ist

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} c \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \epsilon 2\pi = \frac{c}{\epsilon^n}$$

nach unserer Fundamentalabschätzung 6.6 b). Schicken wir ϵ nach 0, so sehen wir, dass $a_n = 0$ für alle $n \leq -1$.

Die Funktion

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ist also auf $B_R(z_0)$ holomorph und stimmt für $z \neq z_0$ mit f überein. □

Falls die Bedingung von Satz 15.1 erfüllt ist, d.h. falls f in einer punktierten Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 beschränkt ist, so sprechen wir von einer *hebbaren Singularität*. Z.B. hat $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ in 0 eine hebbare Singularität.

Bemerkung 15.2. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ offen, $h_1 \colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$, $h_2 \colon \Omega_2 \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass $h_1(z) = h_2(z)$ für $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Dann definiert

$$h(z) := \begin{cases} h_1(z), & z \in \Omega_1 \\ h_2(z), & z \in \Omega_2 \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion von $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Das folgt offensichtlich aus der Definition einer holomorphen Funktion und wurde im Beweis von Satz 15.1 benutzt.

Wir behalten unsere eingangs gemachten Voraussetzungen an $f \colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ bei.

Definition 15.3 (*Klassifizierung von Singularitäten und Nullstellen*)**.** Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt z_0

1. *Pol m-ter Ordnung*, falls $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n \leq -m$. Ein *einfacher Pol* ist ein Pol erster Ordnung,
2. *wesentliche Singularität*, falls es unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ gibt für die $a_{-m} \neq 0$,
3. *Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$*, falls $a_n = 0$ für alle $n < m$ und $a_m \neq 0$.

Pole lassen sich wie folgt charakterisieren.

Satz 15.4. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) z_0 ist Pol m-ter Ordnung.

(ii) Es gibt eine holomorphe Funktion $h \colon \Omega \to \mathbb{C}$ derart, dass

   a) $h(z) = (z - z_0)^m f(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ und

   b) $h(z_0) \neq 0$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Es ist für $0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

wobei $a_{-m} \neq 0$. Setze

$$h(z) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}, & z \in B_R(z_0) \\ \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^m}, & z \in \Omega \setminus B_R(z_0). \end{cases}$$

Nach Bemerkung 15.2 ist h holomorph auf Ω und erfüllt (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es ist $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ für $|z| < R$, wobei $b_0 = h(0) \neq 0$. Damit ist für $0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m},$$

also folgt wegen der Eindeutigkeit der Laurententwicklung, dass $a_{-m} = b_0$ und $a_n = 0$ für $n < -m$. Damit ist z_0 ein Pol der Ordnung m. ☐

Ganz analog können wir Nullstellen und ihre Ordnung charakterisieren.

Satz 15.5. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *z_0 ist eine Nullstelle der Ordnung m.*

(ii) *Es gibt eine holomorphe Funktion $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derart, dass*

  a) *$f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ und*

  b) *$h(z_0) \neq 0$.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Setze

$$h(z) := \begin{cases} \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}, & z \in B_R(z_0) \\ \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^m}, & z \in \Omega \setminus B_R(z_0). \end{cases}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es ist $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ für $|z| < R$, wobei $b_0 = h(0) \neq 0$. Damit ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n+m}$ für $0 < |z - z_0| < R$. Es ist also $a_n = 0$ für $n < m$ und $a_m = b_0 \neq 0$. □

Pole von f und Nullstellen von $\frac{1}{f}$ entsprechen einander wie der folgende Satz zeigt. Immer noch ist f die eingangs beschriebene Funktion.

Satz 15.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$.*

1. *Hat f einen Pol m-ter Ordnung in z_0, so ist $f(z) \neq 0$ in einer kleinen punktierten Kreisscheibe $\dot{B}_r(z_0)$ mit $0 < r \leq R$, und z_0 ist eine Nullstelle m-ter Ordnung von $\frac{1}{f}\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$.*

2. *Hat f eine Nullstelle m-ter Ordnung in z_0, so ist $f(z) \neq 0$ in einer kleinen punktierten Kreisscheibe $\dot{B}_r(z_0)$ mit $0 < r \leq R$, und z_0 ist ein Pol m-ter Ordnung von $\frac{1}{f}\colon \dot{B}_r(z_0) \to \mathbb{C}$.*

Beweis. a): Die Funktion h in Satz 15.4 (ii) erfüllt $h(z_0) \neq 0$, also gibt es $0 < r \leq R$ sodass $h(z) \neq 0$ für $z \in B_r(z_0)$ und folglich ist $\frac{1}{h}$ holomorph auf $B_r(z_0)$. Da $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \frac{1}{h(z)}$ auf $\dot{B}_r(z_0)$, hat $\frac{1}{f}$ eine Nullstelle der Ordnung m in z_0 (nach Satz 15.5).

b): Wir benutzen Satz 15.5 (ii) und zeigen, dass $\frac{1}{f}$ Eigenschaft (ii) aus Satz 15.4 erfüllt. □

Beispiel 15.7.

1. $f(z) = (z-1)^5 + 2(z-1)^6 = (z-1)^5(1 + 2(z-1))$. Wir wählen $h(z) = (1 + 2(z-1))$. Da $h(1) = 1$, hat f eine Nullstelle der Ordnung 5 in 1.

2. $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{1}{z^2}(1 + 2z)$ hat einen Pol der Ordnung 2 in 0.

Der folgende Satz zeigt, dass sich holomorphe Funktionen in der Nähe einer wesentlichen Singularität sehr wild verhalten. Er ist gar nicht schwer zu beweisen. Weiterhin sei $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ die anfangs festgelegte holomorphe Funktion.

Satz 15.8 (Satz von Casorati-Weierstraß)**.** *Hat f in z_0 eine wesentliche Singularität, so ist das Bild jeder noch so kleinen punktierten Kreisscheibe $\dot{B}_r(z_0)$ unter f dicht in $\mathbb{C}$, $0 < r < R$.*

Beweis. O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Sei $0 < r < R$. Angenommen $f(\dot{B}_r(0))$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann gibt es $b \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ sodass $|f(z) - b| \geq \epsilon$ für alle $z \in \dot{B}_r(0)$. Setze $h(z) = \frac{1}{f(z)-b}$. Dann ist $h\colon \dot{B}_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt.

Es gibt also $k\colon B_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph derart dass $k(z) = \frac{1}{f(z)-b}$ für $0 < |z| < r$ und $|k(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$ für $0 \leq |z| < r$. Damit ist $f(z) = b + \frac{1}{k(z)}$.

1. Fall: $k(z) \neq 0$.
Dann hat f eine hebbare Singularität in 0 — ein Widerspruch zur Voraussetzung an f.

2.Fall: k hat eine Nullstelle m-ter Ordnung in 0 mit $m \in \mathbb{N}$.
Dann hat f einen Pol m-ter Ordnung. Auch das widerspricht der Voraussetzung an f. □

Bemerkung 15.9 (äquivalente Formulierung)*.* Die Funktion f habe in z_0 eine wesentliche Singularität. Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gibt es $z_n \in \Omega \setminus \{z_0\}$, sodass $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

Beweis. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Satz 15.8 ein $z_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(z_0)$ sodass $f(z_n) \in B_{\frac{1}{n}}(w)$. □

Korollar 15.10 (Charakterisierung von Polen)**.** *Folgende Aussage sind äquivalent:*

(i) f *hat einen Pol in* z_0.

(ii) $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wähle h wie in Satz 15.4 (ii). Dann ist $f(z) = h(z)(z - z_0)^{-m}$ für $z \in \Omega \setminus \{0\}$, $h(z_0) \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Damit ist $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Nach dem Satz 15.8 von Casorati-Weierstraß gibt es eine Folge $z_n \in \dot{B}_R(z_0)$, sodass $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 1$.

Damit gilt nicht $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. □

Bemerkung. $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$
$:\Leftrightarrow$ für alle $\varrho > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodass für $0 < |z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z)| > \varrho$
$\Leftrightarrow$ für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \neq z_0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$.

16 Integralberechnung

Man kann mit Hilfe des Satzes von Cauchy oft Integrale über ein reelles Intervall oder ganz $\mathbb{R}$ berechnen. Wir geben hier ein sehr interessantes und wichtiges Beispiel. Im Residuenkalkül (Abschnitt 18) wird die Methode später systematisiert.

Satz 16.1. *Es ist*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Da $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist, ist

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

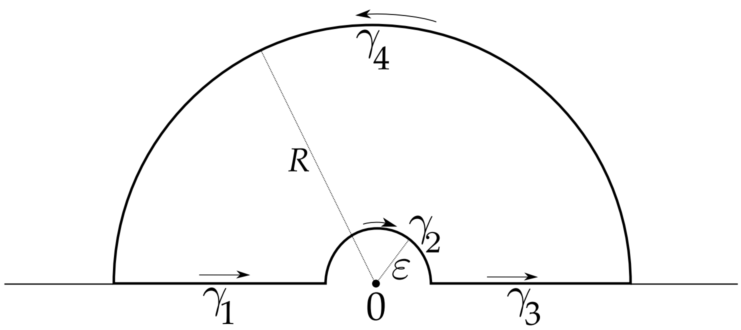
das übliche Riemannintegral einer stetigen Funktion über einem kompakten Integral. In Satz 17.1 ist das uneigentliche Riemannintegral gemeint; d.h.

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{\gamma_1\oplus\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

mit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ und den Wegen $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ wie unten aufgezeichnet.



(b) Der Satz von Cauchy impliziert, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4,$$

da $\mathbb{C} \setminus i(-\infty, 0]$ sternförmig ist.

Damit ist

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(c) Es ist $\gamma_4(t) = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$, $t \in [0, \pi]$. Beachte, dass sin auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ konkav ist, da $\sin'' = -\sin \leq 0$. Daher ist

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi} \text{ für } t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z| &= |\int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it}\,\mathrm{d}t| \\
&\leq \int_0^\pi R|f(Re^{it})|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi |e^{iR\cos t - R\sin t}|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2t}{\pi}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{R} e^{-R\frac{2t}{\pi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{R}(e^{-R} - 1) \to 0 \text{ für } R \to \infty.
\end{aligned}$$

(d) $\gamma_2^-(t) = \epsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_2^-} (\frac{1}{z} + \frac{e^{iz} - 1}{z})\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it}\,\mathrm{d}t + (F(-\epsilon) - F(\epsilon)) \\
&= i\pi + (F(-\epsilon) - F(\epsilon)),
\end{aligned}$$

wobei F holomorph mit $F'(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$.

Da $\lim_{\epsilon \searrow 0} F(-\epsilon) - F(\epsilon) = 0$, ist also

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\gamma_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi.$$

Aus (a), (b), (c) und (d) folgt

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(i\pi) = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

17 Homotopie und Windungszahl

In diesem Abschnitt beschreiben wir Elementargebiete genauer, zum anderen wollen wir die Windungszahl einer Kurve definieren.

Wir erinnern daran, dass in dieser Vorlesung ein Weg per definitionem eine stückweise stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ bedeutet. Er heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.

Definition 17.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Ein geschlossener Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ heißt 0-*homotop*, wenn es $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion
$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$
gibt derart, dass
$$\begin{aligned} H(s,0) &= H(s,1) \; \forall s \in [0,1], \\ H(1,t) &= \gamma(t) \qquad \forall t \in [0,1], \\ H(0,t) &= z_0 \qquad\;\; \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

2. Ω heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg in Ω 0-homotop ist.

Ein geschlossener Weg in Ω ist also 0-homotop, wenn man ihn stetig zu einem Punkt zusammenziehen kann. Anschaulich ist ein Gebiet einfach zusammenhängend, wenn es keine Löcher hat.

Bemerkung 17.2. Wir haben Wege immer als stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt. Man kann zeigen, dass in einem einfach zusammenhängenden Gebiet sogar jede geschlossene *Kurve*, d.h. jede stetig Funktion $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ 0-homotop (im Sinne obiger Definition) ist.

Bemerkung 17.3 (Zusammenhangskomponenten).

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gibt es eine endlich oder abzählbare Familie von offenen, zusammenhängenden, paarweise disjunkten Teilmengen $\Omega_n \subset \Omega$ derart, dass
$$\Omega = \bigcup_n \Omega_n.$$
Mann nennt Ω_n eine *Zusammenhangskomponente* von Ω. Wir lassen den Nachweis als einfache Übungsaufgabe.

2. Eine Teilmenge A von Ω heißt *relativ abgeschlossen*, falls gilt: Sind $z_n \in A$, $z_0 \in \Omega$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, so ist $z_0 \in A$.

   Äquivalent dazu ist, dass $\Omega \setminus A$ offen ist.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{Z}$ stetig. Dann ist f konstant.

Beweis. Sei $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) = m_0$. Die Menge $A := \{z \in \Omega : \ f(z) = m_0\}$ ist offen und relativ abgeschlossen. Damit ist $\Omega = A \dot\cup (\Omega \setminus A)$. Da $A \neq \emptyset$, folgt $\Omega = A$. □

Wenn Ω ein „Loch“ hat, so hat $\mathbb{C} \setminus \Omega$ mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Diese sehr anschauliche Tatsache charakterisiert tatsächlich einfach zusammenhängende Gebiete. Wir geben keinen Beweis.

Satz 17.4 (topologischer Satz)**.** *Ein beschränktes Gebiet ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\mathbb{C} \setminus \Omega$ zusammenhängend ist.*

Wir hatten den Cauchyschen Integralsatz für sternförmige Gebiete formuliert. Hier ist die allgemeine Formulierung.

Theorem 17.5 (Cauchyscher Integralsatz — allgemeine Form)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein geschlossener, 0-homotoper Weg in Ω. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Wir verweisen auf [3, Thm. II.2.10] oder [2, S. 236] für den Beweis.

Korollar 17.6. *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist ein Elementargebiet.*

Das folgt aus Satz 17.5 zusammen mit Satz 13.1.
Nun wollen wir uns dem Hauptgegenstand dieses Kapitels zuwenden.

Satz 17.7 (Windungszahl)**.** *Sei γ ein geschlossener Weg, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(\gamma)$. Dann ist*

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z}\,\mathrm{d}w.$$

eine ganze Zahl. Die Funktion $\mathbb{C}\setminus\mathrm{sp}(\gamma) \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(\gamma)$ konstant. Es heißt $n(\gamma, z)$ die Windungszahl *von γ bzgl. z.*

Beweis. Wir führen den Beweis falls $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist. Es reicht zu zeigen, dass $\exp(2\pi i n(\gamma, z)) = 1$. Um das zu zeigen, setzen wir

$$\varphi(t) := \exp \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s.$$

Wir wollen zeigen, dass $\varphi(b) = 1$.

Es ist

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \quad \forall t \in [a, b].$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}\Big) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \gamma'(t)\varphi(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0$$

für alle $t \in [a, b]$. Damit ist

$$\frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z}.$$

Da $\gamma(a) = \gamma(b)$, folgt $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$, was zu beweisen war.

Man sieht leicht, dass $n(\gamma, \cdot\,)\colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(\gamma) \to \mathbb{Z}$ stetig ist. Damit ist $n(\gamma, \cdot\,)$ nach Bemerkung 17.3 c) auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(\gamma)$ konstant. □

Beispiel 17.8 (Einheitskreis). Der Weg $\gamma(t) = e^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$, durchläuft den Einheitskreis n mal, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Es ist für $z = 0$,

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}} \, \mathrm{d}t = n.$$

Allgemeiner schauen wir uns nun einen Weg an, den wir durch Polarkoordinaten parametrisieren.

Beispiel 17.9. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\alpha(t)}$, wobei $r\colon [a, b] \to (0, \infty)$, $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind mit $r(a) = r(b)$. Der Weg γ läuft anschaulich n mal um z, falls $\alpha(b) = \alpha(a) + n2\pi$. Tatsächlich ist dann auch

$$\begin{aligned}
n(\gamma, z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(r'(t) + r(t)i\alpha'(t))e^{i\alpha(t)}}{r(t)e^{i\alpha(t)}} \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \alpha'(t) \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi i} (\log r(t))' \Big|_a^b + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \alpha'(t) \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \alpha'(t) \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} (\alpha(b) - \alpha(a)) = n.
\end{aligned}$$

Sei γ ein geschlossener Weg. Dann ist $\mathrm{sp}(\gamma)$ kompakt. Damit gibt es $R > 0$, sodass $\mathrm{sp}(\gamma) \subset \overline{B}_R(0)$. Da $\lim_{|z| \to \infty} n(\gamma, z) = 0$, folgt, dass $n(\gamma, z) = 0$ auf der Zusammenhangskomponente, die $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$ enthält.

Man nennt die Menge

$$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(\gamma) : \; n(\gamma, z) = 0\}$$

das *Äußere* des Weges γ und

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(\gamma) : \; n(\gamma, z) \neq 0\}$$

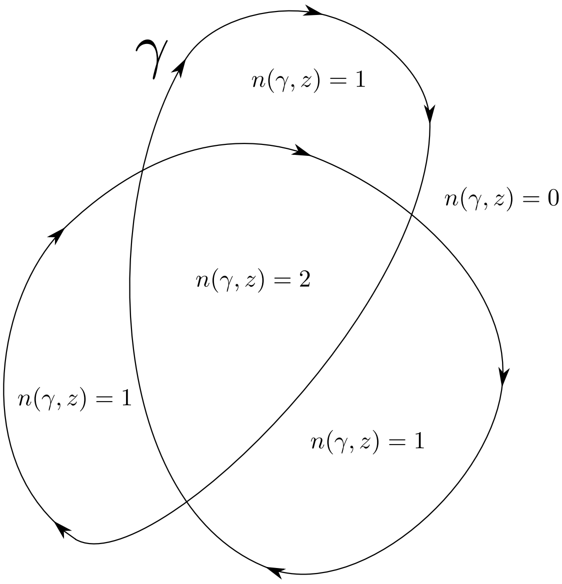
das *Innere* von γ.

Satz 17.10. *Sei* Ω *ein Elementargebiet und* γ *ein geschlossener Weg in* Ω*. Dann ist* $\mathrm{Int}(\gamma) \subset \Omega$.

Beweis. Sei $z_0 \notin \Omega$. Dann definiert $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ eine holomorphe Funktion auf Ω. Damit ist nach Theorem 17.5

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

Also ist $z \notin \mathrm{Int}(\gamma)$. □



Schließlich beweisen wir die allgemeine Cauchysche Integralformel.

Satz 17.11 (Cauchysche Integralformel — allgemeine Form)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* γ *ein* 0*-homotoper, geschlossener Weg. Sei* $f: \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph.*

Dann gilt

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

für alle $z \in \Omega \setminus \mathrm{sp}(\gamma)$.

Beweis. Sei $z \in \Omega$. Durch

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z \\ f'(z), & w = z \end{cases}$$

wird eine holomorphe Funktion $g: \Omega \to \mathbb{C}$ definiert (vgl. Beweis des Lemmas 14.2).

Damit ist $\int_\gamma g(w) \, \mathrm{d}w = 0$, was zu beweisen war. □

18 Residuenkalkül

Ziel dieses Kapitels ist es, einen allgemeinen Satz zu formulieren, der es erlaubt Kontourintegrale durch die Koeffizienten in der Laurentreihe auszudrücken.

Sei $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei Ω offen und $z_0 \in \Omega$ ist. Dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für $0 < |z - z_0| < R$, wobei $R \coloneqq \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Definition 18.1. Die Zahl

$$\operatorname{res}(f, z_0) \coloneqq a_{-1}$$

heißt das *Residuum* von f in z_0.

Das Residuum lässt sich oft leicht bestimmen. Hier sind zwei einfache Regeln.

Satz 18.2 (praktische Bestimmung des Residuums)**.** *a) Sei $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$, $m \in \mathbb{N}$, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Dann ist*

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

b) Sei $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei z_0 ein einfacher Pol von f ist. Dann ist

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Beweis. a) Es ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$. Damit ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n.$$

Somit ist $\operatorname{res}(f, z_0) = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ nach Korollar 4.9.

*b)*Nach Satz 15.4 gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, sodass $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$. Damit ist nach a) $\operatorname{res}(f, z_0) = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$. $\square$

Beispiel 18.3. Sei $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2}$.

Die Funktion $g(z) = (z-1)^2 f(z) = \sin \pi z$ ist holomorph und es ist $g'(z) = \pi \cos \pi z$. Also ist

$$\operatorname{res}(f, 1) = \frac{\pi \cos \pi}{1!} = -\pi.$$

Hat f in z_0 einen Pol und ist

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurentreihe von f, so nennt man die Funktion

$$H(z) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

den *Hauptteil* von f in z_0. Damit ist also z_0 eine hebbare Singularität von $f - H$.

Wir können nun den Residuensatz formulieren und beweisen.

Satz 18.4 (Residuensatz)**.** *Sei Ω ein Gebiet und $z_1, \dots, z_m \in \Omega$.*

Sei $f\colon \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass jedes z_k ein Pol oder eine hebbare Singularität von f ist. Sei γ ein geschlossener, 0-homotoper Weg in Ω. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}(f, z_k) \cdot n(\gamma, z_k).$$

Beweis. Für $k = 1, \dots, m$ bezeichne H_k den Hauptteil der Laurententwicklung von f in z_k. Damit gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derart, dass $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m} H_k(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 17.5) ist

$$\int_\gamma g(z) \,\mathrm{d}z = 0,$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma H_k(z) \,\mathrm{d}z.$$

Nun ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} \,\mathrm{d}z = n(\gamma, z). \tag{18.1}$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(w - z)^m} \,\mathrm{d}w = 0 \quad \text{für } m \geq 2.$$

Um das Letztere zu sehen differenziere man (18.1) nach z und beachte, dass nach Satz 17.7 $n(\gamma, \cdot\,)$ in einer Umgebung von z konstant ist, wenn $z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, m\}$.

Also ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma H_k(z) \,\mathrm{d}z = \operatorname{res}(f, z_k).$$

□

Beispiel 18.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = \pi$$

1. *Beweis mit Residuenkalkül:* Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ hat die zwei Pole erster Ordnung $\pm i$. Es ist nach Satz 18.2 b)

$$\begin{aligned} res(f,i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) \\ &= \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

   Für $R > 1$ sei $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty}\Big(\int_{[-R,R]\oplus\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\Big). \end{aligned}$$

   Nach dem Residuensatz ist das erste Integral unabhängig von R und hat den Wert $2\pi i\,\mathrm{res}(f,i) = \pi$.
   Für $z \in \mathrm{sp}(\gamma_R)$ ist $|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$. Also gilt mit der Standardabschätzung

$$\Big|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq L(\gamma_R)\frac{1}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

   Damit ist $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ und folglich

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi.$$

2. *Beweis aus Analysis 1:* Wir wissen, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\arctan'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty}(\arctan R - \arctan(-R)) \\ &= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich kann man folgenden Satz beweisen (Übungsaufgabe).

Satz 18.6. *Seien P, Q zwei Polynome mit $\mathrm{Grad}\,Q \geq \mathrm{Grad}\,p + 2$. Das Polynom Q habe keine reelle Nullstelle und $\{z_1, \ldots, z_m\}$ sei die Menge der Nullstellen von Q, die in der oberen Halbebene liegen. Sei $f = \frac{P}{Q}$.*

Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{res}(f, z_k).$$

19 Der Riemannsche Abbildungssatz

Wir stellen den Riemannschen Abbildungssatz ohne Beweis vor. Er ist erstaunlich und in sich sehr interessant. Uns erlaubt er es nun Elementargebiete vollständig zu charakterisieren.

Definition 19.1. Zwei offene Teilmengen Ω_1, Ω_2 von $\mathbb{C}$ heißen *konform*, wenn es eine bijektive, holomorphe Abbildung $\varphi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ gibt, derart dass auch φ^{-1} holomorph ist.

Man sieht sehr leicht, dass Ω_2 ein Elementargebiet ist, wenn es ein Elementargebiet Ω_1 gibt, das zu Ω_2 konform ist.

Theorem 19.2 (Riemannscher Abbildungssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, das weder leer noch ganz $\mathbb{C}$ ist. Dann ist Ω konform zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$.*

Korollar 19.3. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Ω ist ein Elementargebiet,

(ii) Ω ist einfach zusammenhängend.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$: Theorem 17.5.

$(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathbb{C}$ ist ein Elementargebiet und einfach zusammenhängend. Ist $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, so ist Ω konform zu $\mathbb{D}$. Da $\mathbb{D}$ einfach zusammenhängend ist, ist es auch Ω. □

Das obige Korollar ist erstaunlich, da „einfach zusammenhängend“ ein rein topologischer Begriff ist.

Insbesondere ist er invariant unter Homöomorphie: Zwei offene Menge $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ heißen *homöomorph*, falls es eine bijektive, stetige Abbildung $\varphi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ gibt, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Man sieht leicht, dass Ω_2 einfach zusammenhängend ist, wenn Ω_2 zu einer einfach zusammenhängenden Menge homoömorph ist, beachte Bemerkung 17.2.

Der Leser wird sich fragen, warum im Riemannschen Abbildungssatz $\mathbb{C}$ eine Ausnahmerolle spielt. Er denke an den Satz von Liouville, der sagt ihm gleich warum $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ nicht konform sein können.

20 Die Riemannsche Vermutung

Wir werden die Riemannsche Vermutung in dieser Vorlesung nicht beweisen: Es handelt sich um das größte offene Problem in der Mathematik. Aber wir denken, dass alle Mathematikstudenten diese berühmte Vermutung kennen sollten.

Die Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{20.1}$$

konvergiert für $\operatorname{Re} z > 0$ und zwar gleichmäßig in jeder Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$ mit $\delta > 0$. Damit ist die Funktion $\zeta : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ holomorph; wobei $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Natürlich ist $n^z = e^{z \log n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

Die durch (20.1) definierte Funktion heißt die *Riemannsche Zeta-Funktion*.

Theorem 20.1 (B. Riemann 1859)**.** *Die Riemannsche ζ-Funktion hat eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. In 1 hat sie einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1.*

Die Riemannsche ζ-Funktion (also die holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ hat Nullstellen in $z = -2, -4, -6, \ldots$; die sogenannten trivialen Nullstellen. Riemann stellte 1859 fest, dass alle anderen Nullstellen in dem sogenannten kritischen Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ liegen. Er vermutete, dass sie sogar alle auf der geraden $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ liegen.

Riemannsche Vermutung.
Sei $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Re} z \neq \frac{1}{2}$. Dann ist $\zeta(z) \neq 0$.

Man weiß, dass es unendlich viele Nullstellen auf der kritischen Geraden $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\}$ gibt.

Die Tatsache, dass $\zeta(z) \neq 0$ für $\operatorname{Re} z \geq 1$ gilt (siehe [3, Theorem II.5.11])spielt beim Beweis des Primzahlsatzes eine Rolle, der wohl Riemanns Motivation war, die ζ-Funktion zu untersuchen. Der Primzahlsatz wurde schließlich unabhängig von J. Hadamard und C. de la Vallée-Poussin im Jahr 1896 bewiesen. Methoden der Funktionentheorie gehen in den Beweis z.B. in Form vom Tauberschen Sätzen für Laplace-Transformationen ein.

Der Primzahlsatz lautet so.

Primzahlsatz. *Für $x > 0$ sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner gleich x sind.*

Dann gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

Schon Euklid hatte im 3. Jahrhunder vor Chr. bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Der Primzahlsatz sagt uns genauer, wieviele Primzahlen es asymptotisch in einem Intervall [1,x] gibt. Dieses asymptotische Verhalten war von Gauß 1793 vermutet worden. Es dauerte mehr als 100 Jahre bis ein Beweis gefunden wurde.

Die Riemannsche Vermutung würde weitere Aussagen über Primzahlen liefern. Wir warten noch auf einen Beweis.

Literaturverzeichnis

[1] O. Forster. *Analysis 1*. Vieweg, Wiesbaden, 2011.

[2] E. Freitag and R. Busam. *Funktionentheorie*. Springer, Berlin, 1993.

[3] D. Werner. *Einführung in die höhere Analysis*. Springer, Berlin, 2009.