Übungen zu Maßtheorie

Blatt 10

31. Es sei $1 \leq p < q < \infty$. Gib jeweils ein Beispiel (4)

(a) einer Funktion $f \in L^q([1,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$ mit $f \notin L^p([1,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$.

(b) einer Funktion $f \in L^p((0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ mit $f \notin L^q((0,1], \mathcal{B}, \lambda)$.

32. Gib ein Beispiel einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, sodass $f \notin L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ für alle $p > 1$. (4)

33. Im Fall des Maßraumes $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, mit dem Zählmaß ν, schreiben wir auch (4)

$$\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu).$$

Zeige, dass $\ell^p \subset \ell^q$ für $1 \leq p < q < \infty$.

34. Es sei $1 \leq p < \infty$. Wir bezeichnen mit (4)

$$L^p_+ := \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) : f(x) \geq 0 \text{ für } \lambda\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}\}$$

den *positiven Kegel* von $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

(a) Zeige, dass L^p_+ abgeschlossen ist.

(b) Zeige, dass L^p_+ keine inneren Punkte enthält.