Universität Ulm
Abgabe:
23.01.2012, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 11

Bitte im Hochschulportal für die Vorleistung anmelden!

Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $1 \leq p < q < \infty$.

35. Zeige, dass $L^q(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, falls der Maßraum (Ω, Σ, μ) endlich ist. (4)

Hinweis: Benutze die Hölderungleichung.

36. Es seien $1 \leq p < r < q < \infty$. Zeige, dass $L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^q(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L^r(\Omega, \Sigma, \mu)$ und (4)

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\Theta} \cdot \|f\|_q^{\Theta}$$

für alle $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ und ein $0 < \Theta < 1$.

Hinweis: Wähle $0 < \Theta < 1$ so, dass $\frac{1}{r} = \frac{1-\Theta}{p} + \frac{\Theta}{q}$ und verwende die Hölderungleichung.

37. Es sei $(f_n) \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$, sodass (f_n) in L^p gegen $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und in L^q gegen $g \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ konvergiert. Zeige, dass $f = g$. (4)

38. Es seien $f_n, f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $g_n, g \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$, sodass (f_n) in L^p gegen f und (g_n) in L^q gegen g konvergiert. Zeige, dass $f_n g_n$ in $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gegen fg konvergiert, falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (4)