Übungen zu Maßtheorie

Blatt 12

39. Es sei $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ derart, dass (6)

$$\int_{(-\infty,t)} f \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass

$$\mathcal{A} := \left\{ A \in \mathcal{B} : \int_A f \, \mathrm{d}\lambda = 0 \right\}$$

ein Dynkin-System ist.

(b) Zeige, dass $f = 0$ fast überall.

40. Gib jeweils ein Beispiel (10)

(a) zweier verschiedener Maße μ und ν auf einer σ-Algebra Σ mit Erzeuger $\mathcal{E} \subset \Sigma$, sodass $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$.

(b) einer Funktion

$$f \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p([0,1], \mathcal{B}, \lambda),$$

sodass $f \notin L^\infty([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$.

(c) eines endlichen Maßraums (Ω, Σ, μ) und einer Folge $(f_n) \subset L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, sodass $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für alle $1 \le p < \infty$ aber nicht in $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

(d) eines Dynkin-Systems auf einer Grundmenge Ω, das keine σ-Algebra ist.

(e) eines σ-endlichen Maßraums (Ω, Σ, μ) und einer Unter-σ-Algebra $\mathcal{F} \subset \Sigma$ (d.h. $\mathcal{F} \subset \Sigma$ und $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra), sodass $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_{|\mathcal{F}})$ nicht σ-endlich ist.