Universität Ulm
Abgabe:
06.02.2012, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

12+12 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 13

41. Es seien μ und ν zwei endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit der Eigenschaft, dass (6)

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\nu$$

für alle stetigen und beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass $\mu = \nu$.

42. Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Algebra, sodass $\sigma(\mathcal{A}) = \Sigma$. Ferner seien μ und ν zwei endliche Maße auf Σ, sodass $\mu(A) \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass (4)

$$\mathcal{M} := \{B \in \Sigma : \mu(B) \leq \nu(B)\}$$

eine monotone Klasse ist und folgere $\mu \leq \nu$.

Zeige weiter, dass diese Aussage nicht stimmt, wenn $\mathcal{A}$ lediglich ein durchschnittsstabiler Erzeuger von Σ (und keine Algebra) ist. (2)

43. Es sei μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass

$$\mu(B) = \sup\{\mu(A) : A \subset B,\, A \text{ abgeschlossen}\} = \inf\{\mu(U) : B \subset U,\, U \text{ offen}\}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dazu definieren wir

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \inf\{\mu(U \backslash A) : A \subset B \subset U,\, A \text{ abgeschlossen},\, U \text{ offen}\} = 0\}.$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist. (+4)

(b) Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine monotone Klasse ist. (+4)

(c) Zeige, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$. (+4)

Die Punkte dieser Aufgabe sind Zusatzpunkte.