Universität Ulm
Abgabe:
07.11.11, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 2

5. Auf einem beliebigen messbaren Raum (Ω, Σ) definieren wir das *Zählmaß* $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$ durch $\nu(A) := \#A$, d.h. ν ordnet jeder Menge A aus Σ die Anzahl ihrer Elemente zu.

Wir betrachten nun den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$. Es sei (2)

$$A_n := \{m \in \mathbb{N} : k \text{ teilt } m \text{ für alle } k \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Berechne $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$ sowie $\nu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

6. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(A_n) \subset \Sigma$ eine Folge messbarer Mengen derart, dass $A := \limsup(A_n) = \liminf(A_n)$ (entsprechend der Definition aus Aufgabe 4). Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, falls $\mu(\Omega) < \infty$. (4)

7. Es sei λ das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, der Borel-$\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^2$. (6)

(a) Zeige, dass $\lambda((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = \lambda([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = \lambda([a_1, b_1) \times [a_2, b_2))$ für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < b_1$ und $a_2 < b_2$.

(b) Es sei $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Zeige, dass $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mit $\lambda(E) = 0$.

8. Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ eine Abbildung derart, dass $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \Sigma$. Für jede monoton wachsende Folge messbarer Mengen $(A_n) \subset \Sigma$ sei zudem $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ mit $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Zeige, dass μ ein Maß ist. (4)