Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 8

25. Es sei μ ein endliches Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wir definieren $\Phi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch (4)

$$\Phi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}\mu(x) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeige, dass Φ_μ stetig ist.

(b) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die identische Abbildung $h(x) := x$. Zeige, dass Φ_μ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\Phi'_\mu(t) = i \int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}\mu(x) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

falls $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

26. Es sei $(a_k) \subset \mathbb{R}$ eine absolut summierbare Folge. Zeige, dass die durch (4)

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

definierte Funktion $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Hinweis: Schreibe f als Parameterintegral bzgl. des Zählmaßes auf $\mathbb{N}$ und betrachte F zunächst auf dem Intervall $U := (-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

27. Gib jeweils ein Beispiel eines Maßraums (Ω, Σ, μ) und Funktionen $f_n, f \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind. (8)

(a) $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Jedoch gilt $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \neq 0$.

(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$, $f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $|\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu| \leq c$ für ein $c > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

(c) $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$ aber für kein $x \in \Omega$ konvergiert $f_n(x)$ gegen $f(x)$ für $n \to \infty$.

(d) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$, alle f_n sind integrierbar mit $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n| \, \mathrm{d}\mu = 0$ aber keine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ erfüllt $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$.